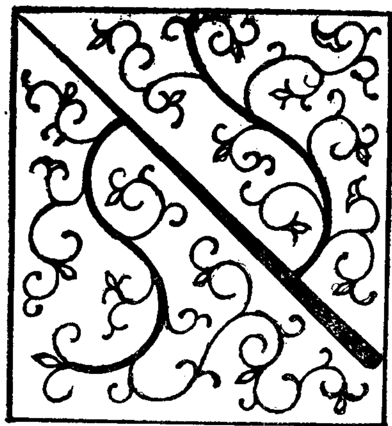
谢邦杰 编著

超穷数与超穷论法



超穷数与超穷论法

谢邦杰 编著



吉林人民出版社

内 容 提 要

这是一本数学理论书籍．介绍有关“超穷数与超穷论法”的基础理论知识、近代研究成果和历史进展概况，以及它在数学中的应用．书中综述了从1870年到1977年两百多篇重要文献，对一些著名的原理和论证，进行了极有意义的简明而生动的叙述．

全书内容大部分较为通俗易懂，特别是前八节，大学数学系三年级以上同学，能够由浅入深、循序渐进地看懂，故可作为数学系高年级学生、研究生以及对数学理论有兴趣的科技工作者的参考用书．

本书是吉林大学数学系谢邦杰教授在教学实践的基础上编写而成的，并曾经过中国科学院数学研究所的同志审阅．

超穷数与超穷论法

谢邦杰　编著

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　4½印张　插页1　77,000字

1979年1月第1版　1979年1月第1次印刷

印数：1—47,000册

书号：15091·146　定价：0.47元

序　　言

对超穷数的研究，是由于数学理论发展的需要而提出来的，因为数学的研究对象中，无穷集合实在太多了。这项研究工作开始于十九世纪末期，由Cantor首先进行的。在当时的舆论下，这项研究受到不少压力和阻力，以致 Cantor 的著作在当时未能立即发表。后来，这一门崭新的学科，由于实际的需要，才从此逐渐形成、发展和壮大起来了。

概率论中著名的第二次公理化（1933）的提出者 Kolmogorov 就对 Cantor 和当时已发展起来的“抽象集合论”给了如此高的评价：Cantor 的不朽功绩，在他敢于向无穷大冒险迈进，他对似是而非之论、流行的成见、哲学的教条、以及最大数学家的信念作了内外的斗争，由此使他成为一门新学科的创造者，**这门学科已在今日成了全部数学的基础。**

特别是，自从 Gödel 的著名工作(1938—1940)出来后，在近三、四十年来，这门学科本身的突飞猛进的发展，以及它在数学各个分支中的重要应用，尤其是**在方法上所起的巨大作用**，已成为丝毫无可否认的事实了（参看本书 § 8 后半部分和 §§ 9—11)。

本书的内容共计四个部分：

（一）超穷数与超穷论法基础知识的较为详细的介绍和近代成果的简单介绍；

（二）这套理论在数学基础课程中和在近代数学理论中的应用举例，即分别为§9 和 §10；

（三）本学科的历史发展概况；

（四）综述近代有关的主要文献两百多篇，并扼要地介绍国际上一些有关的著名工作，例如整序定理，Hessenberg 定理，Zorn 引理，Stone 表示定理，Gödel 的相容性结果，Fraenkel 模型，Cohen 模型，分球奇论，Hahn-Banach 扩张定理，Bourbaki 用超漏斗来证Tychonoff 紧致空间直积定理，非标准实数域，选择公理与质理想定理的各种等价命题等等。

本来我在这方面的学习是很不够的，特别是在“四人帮”祸国殃民之际，很难公开地认真地学习这些内容的。本书的初稿仅是75年为概率班同学写的参考资料和概率论讨论班的部分内容，并没有争取出版之意。但由于最近参加在上海召开的数学教材编写大纲讨论会时，一些同志的积极建议，并为基础数学理论诸方向的高年级和研究生服务，才重新整理和补充，鱼鲁之误，在所难免，故希望读者多加批评和帮助。让我们为实现科学技术现代化，而共同奋勇前进。

作　　者

1977，12，8.

目　　次

§1. 基数及其大小

基数是一种用来表达一个集合的元素的个数的概念. 对于非空的有限集合的基数(即普通的自然数)的概念是比较容易理解的, 现在把此概念推广到任意集合上去.

首先, 比如就"5"这个概念来说, 它是从观察许多只含五个元素的集合的共同特点而加以抽象概括出来的. 这个共同特点乃体现于这些被观察的任意两个集合的元素之间有一个一一对应存在. 由此可见, "对应"这个概念比起自然数的概念还更基本. 人们就抓住这点来进行推广.

设 A, B 为任意两个集合. 如果 A 与 B 的元素之间有一个一一对应存在, 则说 A 与 B **同浓**, 记为 $A \equiv B$. 由此即可定义

基数: 所有与集合 A 同浓的集合所作成的集合叫做集合 A 的基数, 并记为 $\overline{\overline{A}}$.

由此即知 $A \equiv B$ 必要而只要 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 也就是说: 集合 A 同浓于集合 B 必要而只要 A 的基数等于 B 的基数. 空集合的基数定义为 O. 非空的有限集合的基数就是它的元素的个数. 有限集合的基数叫做**有穷基数**;

无限集合的基数叫做**超穷基数**.

与所有自然数的集合同浓的集合叫做**可数集合**，其基数习惯地记为d。易知所有整数的集合与所有有理数的集合都是可数集合，它们的基数都是 d。

所有适合 $0<x\leqslant 1$ 的实数 x 的集合叫做**连续统**，习惯地记此集合为C，其基数记为c。Cantor（1874，1879）与 Poincaré（1910）先后用不同方法证明C不是可数集合（也可说 C 是**不可数的**），即$c\neq d$。另一方面，因为任何无穷集合恒包含一个**可数子集**（即有一个子集合，它是可数集合），所以这就启示人们把自然数之间比较大小的概念推广到一般基数上去。

一般的基数总是用小写字母 a，b，…等来表示。设 a，b 是任意两个基数，而 A，B 是相应的两个集合，即集合A的基数$\overline{\overline{A}}=a$，集合$B$的基数$\overline{\overline{B}}=b$。如果 A 能与 B 的某个子集 B^*同浓，则说 a **小于等于** b，记为 $a\leqslant b$。此定义显然与 A，B 的取法无关。即在此时，若另取集合 A_1 使$\overline{\overline{A}}_1=a$，另取集合 B_1 使$\overline{\overline{B}}_1=b$，则 A_1 仍能与 B_1 的某个子集B_1^*同浓，于是照样有 $a\leqslant b$。

Bernstein 定理。若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$。

证明。任取两个相应的集合 A，B。由所设条件 $a\leqslant b$ 及 $b\leqslant a$ 即知应有 A 到 B 内的一一映射 f 及 B 到 A 内的一一映射 g 存在：

$$A\xrightarrow{f}B^*\subset B,\qquad B\xrightarrow{g}A^*\subset A.$$

于是 B^* 到 A 上就有一一映射 f^{-1}，A^* 到 B 上就有一一映射 g^{-1}。故对于任意 $\alpha\varepsilon A$，$\beta\varepsilon B$ 而言 α^f，β^g 恒有意义 ($\alpha^f\varepsilon B^*, \beta^g\varepsilon A^*$)，但 $\alpha^{g^{-1}}, \beta^{f^{-1}}$ 则未必有意义。

现在看出 A 的元素可分为下列三类：

A_1 类包括所有这样的 α，它在 g^{-1}，f^{-1} 不断地交错作用下恒有意义。即

$$\alpha^{g^{-1}}\ \varepsilon B^*,\qquad \alpha^{g-1f^{-1}}=(\alpha^{g^{-1}})^{f-1}\varepsilon A^*,\cdots$$

总之 $\alpha^{g^{-1}f^{-1}g^{-1}f^{-1}\cdots}$ 恒有意义，无论作用多少次（当然指有限次而言）；

A_2 类包括所有这样的 α，它在 g^{-1}，f^{-1} 的交错作用下，不能恒有意义，而首先造成无意义的情况是碰到 f^{-1}；

A_3 类则为那些 α，首先造成无意义的情况是碰到 g^{-1}。

同理 B 可分为三个子集：

B_1 含这些元素，它在 f^{-1}，g^{-1}，…的交错作用下恒有意义；

B_2 含这些元素，它在 f^{-1}，g^{-1}，…的交错作用下不能恒有意义，而首先造成无意义的情况是碰到 f^{-1}；

B_3 含这些元素，它在交错作用下，首先造成无意义的情况是碰到 g^{-1}。

于是由 $A_1\xrightarrow{f}B_1$ 知 $A_1\equiv B_1$；由 $A_2\xrightarrow{g^{-1}}B_2$ 知 $A_2\equiv$

B_2；由 $A_3 \xrightarrow{f} B_3$ 知 $A_3 \equiv B_3$。故知 $A \equiv B$，这就证明了 $a = b$。

设 a，b 为两个基数。如果 $a \leqslant b$ 且 $a \neq b$，则说 a **小于** b，记为 $a < b$，或说 b **大于** a，记为 $b > a$。

现在设 A 为任意一个集合。A 的所有子集作成的集合叫做 A 的**幂集合**，记为 UA。

例如 $A = \{1, 2, 3\}$ 时，UA 就共有 8 个元素：$\{1\}$；$\{2\}$；$\{3\}$；$\{1, 2\}$；$\{1, 3\}$；$\{2, 3\}$；$\{1, 2, 3\}$；ϕ＝空集。

又如 A 为空集合时，A 虽然不含任何元素，但 UA 却有一个元素 ϕ。

Cantor 定理。对任何集合 A，其幂集合的基数恒大于 A 的基数，即恒有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{UA}}$。

证明。首先显然有 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{UA}}$。然后用反证法来证明 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{UA}}$。假若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{UA}}$，则 A 的元素 x 与 A 的子集 X 之间就有一个一一对应 φ：

$$x \longleftrightarrow X$$

存在。现在来考虑 A 中这样的元素 x，它具有性质 $x \notin X$（即 x 不属于它所对应的子集 X）。然后令 Y 是由 A 中所有这样元素作成的子集。于是在对应 φ 下，Y 就与 A 中某个元素 y 对应。这样一来，由 Y 之定义就知道：当 $y \notin Y$ 时，y 就具有上述性质，从而应有 $y \in Y$，此为矛盾；当 $y \in Y$ 时，y 就不具上述性质，从而应有 $y \notin Y$，也是矛盾。故必有 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{UA}}$。证毕。

思 考 题

1. 对任二基数 a, b, 下列三式最多只能有一式成立：$a=b$; $a<b$; $a>b$.

2. 设 a, b, e 为任意三个基数. 如果 $a\leqslant b$, $b<e$, 或者 $a<b$, $b\leqslant e$, 则均有 $a<e$.

3. 可数集合的基数 d 必小于连续统的基数 c.

4. 所有实数作成的集合的基数仍为 c.

5. n 维空间中单位方体内所有的点作成的集合的基数仍为 c. 亦即所有这样的 n 元向量：

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $0<x_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$所作成的集合的基数为 c.

6. n 维空间中所有点作成的集合的基数仍为 c.

7. 有无穷多个彼此不等的超穷基数存在.

参 考 书

Fraenkel, Abstract Set Theory, §§1—5.

§2. 基数的运算

本节将把有穷基数的加法、乘法、乘方等运算推广到一般基数上来。

设 a，b 为任二基数（可以相等），A，B 为相应的集合，不妨设 A 与 B 无公共元素。并集 $M = A \cup B$ 的基数 $\overline{\overline{M}}$ 显然就可以定义为 a，b 之**和**，而记为 $\overline{\overline{M}} = a + b$。这样就定义了基数的**加法运算**。然后再定义基数的**乘法运算**如下：设 $N = A \times B$ 为所有这样元素

$$(x, y), \text{其中 } x \varepsilon A, \ y \varepsilon B$$

所作成的集合，则可定义 N 的基数 $\overline{\overline{N}}$ 为 a，b 之**积**，而记为 $\overline{\overline{N}} = ab$。又当 a，b 之一为 0 时，就定义 $ab = 0$。

显然上面定义的加法与乘法均不难推广于任意有限个基数的加法与乘法，且由定义易证。

定理 1．基数的加法与乘法适合

交换律：$a + b = b + a$，$ab = ba$；

结合律：$(a + b) + e = a + (b + e)$，$(ab)e = a(be)$；

分配律：$a(b + e) = ab + ae$，

其中 a，b，e 为任意基数。

定理 2．设 a_1，a_2，b_1，b_2 为任意基数。如果 $a_1 \leqslant b_1$，$a_2 \leqslant b_2$，则

$$a_1+a_2\leqslant b_1+b_2,\ a_1a_2\leqslant b_1b_2.$$

现在就设 $a=\overline{\overline{A}}$, $b=\overline{\overline{B}}$ 为任二基数，但 $b\neq 0$. 考虑定义在集合 B 上而值在集合 A 中的所有函数

$$y=f\ (x),\ 其中\ x\varepsilon B,\ y\varepsilon A$$

所作成的集合 F，并定义 $\overline{\overline{F}}=a^b$，叫做 a 的 b **方**。当 $b=0$ 时，定义 $a^0=1$，对任意 $a\neq 0$.

当 n 为自然数时，按照上面的乘法与**乘方**的定义，a^n 与 n 个 a 相乘是一致的。请读者自己验证。

由乘方的定义，易证明下列的**指数定律**成立。即有

定理 3. $a^b a^c=a^{b+c}$； $(ab)^c=a^c b^c$; $(a^b)^c=a^{bc}$.

此外，还有

定理 4. 对任意集合 A 恒有 $\overline{\overline{UA}}=2^{\overline{\overline{A}}}$.

这只要考虑定义在 A 上而值在 $\{0, 1\}$ 中的函数，这样一个函数恰与 A 的一个子集相应（比如是取值为 0 的所有点作成的子集）.

当 A 为空集时，仍有 $\overline{\overline{UA}}=1=2^0=2^{\overline{\overline{A}}}$.

定理 5. $c=2^d$.

比如只考虑含 3 与 5 的无穷小数，这些小数作成连续统的一个子集，其基数为 2^d，从而有 $2^d\leqslant c$. 另一方面，若把连续统中的实数都用二进位法表示，则又应得出 $c\leqslant 2^d$. 故通过 §1 的 Bernstein 定理即得 $c=2^d$.

定理 6. 如果 $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, 则 $a_1+a_2<b_1b_2$.

证明。令$a_1=\overline{\overline{A}}_1$，$b_1=\overline{\overline{B}}_1$，$a_2=\overline{\overline{A}}_2$，$b_2=\overline{\overline{B}}_2$。

由 $a_1<b_1$ 知 A_1能与 B_1 的某个真子集 B_1' 同浓，故 B_1中必有一个元素 $\beta_1 \bar{\in} B_1'$。同样，由 $a_2<b_2$ 知 A_2 与 B_2 的某个真子集 B_2' 同浓，B_2 中有元素 $\beta_2 \bar{\in} B_2'$。现在来看集合 $B_1\times B_2$。令 Σ_1 为此集合中所有这样的元素

$$(x,\ \beta_2),\ 其中\ x\ \varepsilon\ B_1'$$

所作成的子集，则有 $\Sigma_1\equiv B_1'\equiv A_1$。再令 Σ_2 为所有这样的元素

$$(\beta_1,\ y),\ 其中\ y\ \varepsilon\ B_2'$$

所 作成的子集，则有$\Sigma_2\equiv B_2'\equiv A_2$。而且$\Sigma_1$与$\Sigma_2$是 $B_1\times B_2$ 的两个没有公共元素的子集。由此即知

$$a_1+a_2\leqslant b_1\ b_2。$$

还要证明$a_1+a_2\neq b_1\ b_2$，这又只要证明“如果 $B_1\times B_2$ 的任何子集 Σ 能与 $A_1\cup A_2$ 同浓，则 Σ 必为真子集”就够了。因为 Σ 能与 $A_1\cup A_2$ 同浓，故 Σ 可分为两个不相交的子集$\triangle_1$与$\triangle_2$使得$\triangle_1\equiv A_1$，$\triangle_2\equiv A_2$。试看$\triangle_1$中所有元素 $(x,\ y)$ 的第一分量 x 所作成的集合 X_1。可断言 X_1 必为 B_1 的真子集，否则就有 A_1 到 B_1 上的一个映射存在，从而得$\overline{\overline{B}}_1\leqslant\overline{\overline{A}}_1$的矛盾。既然 X_1 为 B_1 的真子集，故 B_1中有元素 $x^*\bar{\in} X_1$。同理，$\triangle_2$ 中所有元素的第二个分量所作成的集合X_2必为B_2的真子集，故B_2中又有元素$y^*\bar{\in} X_2$。于是 $B_1\times B_2$ 中就有元素$(x^*,\ y^*)$不在$\triangle_1\cup\triangle_2=\Sigma$

之中，即 Σ 必为 $B_1 \times B_2$ 的真子集．证毕．

思 考 题

1．设 D 是任意一个非空集合，且对 D 中每个元素 i 就有一个基数 a_i 与它相应．试把两个基数的加法运算再推广为

$$\sum_{i \varepsilon D} a_i \quad (\Sigma\text{即求和之意})$$

并由此推出乘法可由加法来实现，即证明

$$\overline{\overline{A}}\ \overline{\overline{B}} = \sum_{i \varepsilon B} a_i = \sum_{j \varepsilon A} b_j$$

其中$a_i = \overline{\overline{A}}$（对每个 $i \varepsilon B$），$b_j = \overline{\overline{B}}$（对每个 $j \varepsilon A$）．

2．把两个基数的乘法运算推广为

$$\prod_{i \varepsilon D} a_i \quad (\Pi\text{即求乘积之意})$$

并由此推出乘方运算乃是乘法运算的特例，即证明

$$\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \prod_{i \varepsilon B} a_i$$

其中$a_i = \overline{\overline{A}}$（对每个 $i \varepsilon B$）．

3、举例说明从 $a_1 \leqslant b_1$，$a_2 < b_2$ 未必能推出下面的两个不等式：

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2, a_1 a_2 < b_1 b_2.$$

4．举例说明从 $a_i < b_i$ （$i \varepsilon D$）未必能推出下面两个不等式：

$$\sum_{i \varepsilon D} a_i < \sum_{i \varepsilon D} b_i, \quad \prod_{i \varepsilon D} a_i < \prod_{i \varepsilon D} b_i.$$

5．证明定理 6 的推广结果 （Konig-Zermelo 不等式）：

如果 $a_i<b_i$ $(i\varepsilon D)$，则

$$\sum_{i\varepsilon D} a_i < \prod_{i\varepsilon D} b_i.$$

6．定理 3 的前两式的推广结果为

$$\prod_{i\varepsilon D}(a^{b_i}) = a^{\Sigma b_i},\quad \prod_{i\varepsilon D}(a_i^b) = \left(\prod_{i\varepsilon D} a_i\right)^b.$$

其中 Σb_i 即 $\sum\limits_{i\varepsilon D} b_i$.

7．对任何大于 1 的自然数 n 恒有 $n^d=c$。

8．$c^d=c$，$2^c=c^c$。

9．对任意一个取定的基数 b 恒有无穷多个基数 a 使 $a^b=a$.

10．[0，1] 区间上的所有实函数作成的集合的基数$>c$。又若改为连续函数或可微函数，则如何？

11．不用定理 4 与 § 1 的 Cantor 定理而直接证明：对任何基数 a 恒有 $a<2^a$.

（设 $a=\overline{\overline{A}}$。在 A 上定义函数，其值取0或1（对 A 中每一元素）。如果这些函数能与 A 的元素 x 成一一对应

$$x\longleftrightarrow f_x$$

则可再定义出另一新函数，从而引起矛盾）

12．设 S 是任意若干个基数作成的集合，则必有基数存在，它大于 S 中每个基数。

参 考 书

Fraenkel, Abstract Set Theory, §§ 6—7.

§3. 部分序集与 Zorn 引理

集合之间的同浓关系具有三点基本性质，即通常所说的反身性、传递性和对称性。凡具此三性质的关系，就叫做一个等价关系。本节末的部分序集之间的相似关系也是一个等价关系。

基数之间的“$\leqslant$”关系也具有三点基本性质，即反身性、传递性和反对称性。凡具此三性质的关系，就叫做一个部分序关系。

等价关系与部分序关系是更一般的所谓二元关系的两个极为重要的特例。

定义. 设 S 是任意一个集合. 如果 S 的某些元素之间有这样一个关系“$\leqslant$”，它具有性质：

(i) **反身性**：对任何 $x \varepsilon S$，恒有 $x \leqslant x$；

(ii) **传递性**：如果 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$；

(iii) **反对称性**：如果 $x \leqslant y$，$y \leqslant x$，则必有 $x = y$，

则说 S 是一个**部分序集**。

在部分序集 S 中，当 $x \leqslant y$ 而 $x \neq y$ 时，可记为 $x < y$ 或 $y > x$。

显然部分序集的子集在其元素之间的“$\leqslant$”关系

下亦为部分序集。特别地，空集为部分序集。

例 1．任何集合 A 的幂集合 $S=UA$，在 A 的子集之间的包含关系"$\subset$"下，就是一个部分序集。

例 2。所有自然数在普通的"$\leqslant$"关系下就构成一个部分序数 S_1。

例 3．所有自然数在普通的整除关系"$|$"下又构成另一个部分序集 S_2。

S_1 与 S_2 是由同一个集合（自然数集）按不同的"部分序"关系而定义的不同的部分序集。

如果一个部分序集 S 再满足条件

(iv) 对任意 x，$y \varepsilon S$，恒有 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$，则 S 就叫做一个**单线序集**或简曰**序集**。

显然序集的子集仍为序集。特别地，空集为序集。序集恒为部分序集，但反之则未必。例如上面的例 1 与例 3 中的 S 与 S_2 都是部分序集但都不是序集，例 2 中的 S_1 则为序集。

设 M 为一序集，A 是 M 的一个子集。如果 $x_\circ \varepsilon A$ 而当 $x \leqslant x_\circ$ $(x \varepsilon M)$ 时就必有 $x \varepsilon A$，则说 A 是 M 的一个**前段**。如果 A 是 M 的一个前段而且 A 是真子集，则说 A 是 M 的一个**真前段**。

例如序集 M 本身就是 M 的一个前段，但不是真前段；在序集 M 中任取一个元素 x，则 M 中所有 $\leqslant x$ 的元素就构成 M 的一个前段，记为 $A[x]$；M 中所有 $<x$ 的元素构成 M 的一个前段，记为 $A(x)$。

由定义不难验证：

命题 1．序集M的若干个前段的并集仍为M的一个前段。

命题 2．序集M的前段（作为序集）的前段仍为M的前段。

以上二命题请读者自证。

命题 3．序集M的任意两个前段A，B必有一个是另一个（作为序集）的一个前段。

证明。当$A=B$时，理甚显然。当$A\neq B$时，不妨设有$\beta \in B$而$\beta \notin A$。今证A必为序集B的一个前段。首先证$A\subset B$。设$x \in A$。可断言在M中必有$x<\beta$。假若不然，则应有$\beta<x$，而$x \in$前段A，故必有$\beta \in A$，此为矛盾。既然$x<\beta$，而$\beta \in$前段B，故$x \in B$。这就证明了$A\subset B$。其次证A为序集B的一个前段。设$x_0 \in A$而$x\leqslant x_0$（$x \in B$）。由于A为M的一个前段，而$x \in B\subset M$（即$x \in M$），且$x\leqslant x_0 \in A$，故$x \in A$。由定义即知A为序集B的一个前段。证毕。

现在仍设S为一般的部分序集（即未必是序集），x_0为S中一个元素。如果S中没有元素能大于x_0，即S中没有x能使$x_0<x$成立，则说x_0是S的一个**极大元素**。再设M是S的一个子集，β是S中一个元素。如果M中的元素都$\leqslant\beta$，则说M在S中有一个**上界**β。M的一个上界可能在M中也可能不在M中，而且S的任意一个子集M在S中未必就有上界。

例如设

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

为在整除关系下的一个部分序集。元素 4，5，6 都是极大元素；子集 $\{1, 2, 4\}$ 在 S 中只有一个上界 4；子集 $\{1, 3\}$ 在 S 中有上界 3 与 6；子集 $\{1, 2, 3\}$ 在 S 中有上界 6，它不在此子集中；子集 $\{3, 4\}$ 在 S 中无上界。

设 N 是部分序集 S 的一个子集。如果部分序集 N 是单线序集，则说 N 是 S 的一个**单线子集**。

从上面的例 2 和例 3 可看出，一般的部分序集未必含有极大元素，但却有下面这个著名的引理。

Zorn 引理。如果部分序集 S 的任何单线子集均在 S 中有上界，则 S 必含有极大元素。

证明。用反证法。假若 S 不含极大元素，则对 S 的任何元素 x 恒存在另一元素 $\beta>x$。特别地，对 S 的任何单线子集 A，恒存在元素 $\beta>A$ 的上界。于是 $\beta>A$ 中所有元素。我们对 S 的每个单线子集 A 均取定这样一个元素，并记为 β_A（在此暗中用到了§8要介绍的选择公理。但这对初学者来说，可以暂时先不管它）。显然 $\beta_A \notin A$，而且 A 与 $\{\beta_A\}$ 的并集仍为 S 的一个单线子集，记为 A^+。在此基础上，可定义 S 的标准子集如下：

设 N 是 S 的一个单线子集。如果 N 具有性质："当 A 是序集 N 的一个真前段时，A^+ 也必为 N 的一个前

段”，则说 N 是 S 的一个**标准子集**.

由定义知空集 ϕ 就是 S 的一个标准子集. 因为 ϕ 是 S 的一个单线子集，而且它没有真前段；ϕ^+ 亦为 S 的一个标准子集. 因为 $\phi^+=\{\beta_\phi\}$ 为 S 的一个单线子集，它只有一个真前段 ϕ，而且 ϕ^+ 仍是它的前段.

对于 S 的标准子集可建立下列诸命题：

1° 如果 N 是 S 的标准子集，则 N^+ 亦然.

事实上，如果 A 是 N^+ 的一个真前段，则可断言 $\beta_N \not\in A$. 假若不然，由 $\beta_N \in A$ 便可以推出 $N^+ \subset A$ 的矛盾. 既然 $\beta_N \not\in A$ 而 A 为 N^+ 的子集，故 A 必为 N 的子集，于是易知 A 为 N 的一个前段. 如果 $A=N$，则 $A^+=N^+$，因此 A^+ 便为 N^+ 的前段；如果 $A\neq N$，则 A 为 N 之真前段，由 N 之标准性知 A^+ 为 N 的前段，而 N 显然又为 N^+ 之前段，故由命题 2 也知 A^+ 为 N^+ 的前段. 总之，如果 A 是 N^+ 的一个真前段，则 A^+ 就为 N^+ 的前段. 故按定义知 N^+ 为 S 的标准子集. 1° 得证.

2° S 的任意两个标准子集 M 与 N 中必有一个是另一个的前段.

令 A 为 M 与 N 的所有公共前段的并集. 由命题 1 知 A 既为 M 又为 N 的前段，从而 A 便为 M 与 N 的最大公共前段. 可断言 A 必为 M，N 之一. 假若不然，则 A 为 M，N 的公共真前段，于是由 M，N 之标准性知 A^+ 将为 M，N 的公共前段，此与上述结论矛

盾，这便证明了 M，N 中必有一个为另一个的前段。2° 得证。

3° S 的所有标准子集的并集 U 仍为 S 的一个标准子集。

首先证 U 为 S 的一个单线子集。U 显然是在 S 中的"$\leqslant$"关系下为一个部分序集，故只要证 U 中任二元素 x，y 恒有此关系就行了。既然 x，$y \varepsilon U$，所以必有 S 的标准子集 M 与 N 使 $x \varepsilon M$，$y \varepsilon N$，但由 2° 知或 $M \subset N$ 或 $N \subset M$，故 x，y 同在 S 的一个标准子集中，从而有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$。

其次证 S 的任一标准子集 N 均为 U 的前段。亦即证："如果 $x_\circ \varepsilon N$，$x \leqslant x_\circ$（$x \varepsilon U$），则 $x \varepsilon N$"。既然 $x \varepsilon U$，所以必有 S 的某一个标准子集 M 使 $x \varepsilon M$。由 2° 知或 M 为 N 之前段（此时自然有 $x \varepsilon N$）；或 N 为 M 之前段（此时由前段之定义也应有 $x \varepsilon N$）。总之，有 $x \varepsilon N$。

最后证 U 是 S 的一个标准子集。设 A 为 U 的一个真前段。于是有 $\beta \varepsilon U$ 而 $\beta \overline{\varepsilon} A$，从而有 S 的某个标准子集 N 使 $\beta \varepsilon N$ 而 $\beta \overline{\varepsilon} A$。上面已证 N 应为 U 的前段，故由命题 3 及 $\beta \varepsilon N$，$\beta \overline{\varepsilon} A$ 知 A 必为标准子集 N 的一个真前段，所以 A^+ 为 N 的前段，再由命题2知 A^+ 为 U 的前段，因此 U 是 S 的一个标准子集。3° 证毕。

现在就可以得出一个矛盾。因由 3° 知 U 为 S 的最大标准子集，但由 1° 又知 U^+ 应为 S 的一个标准子集，

此为矛盾。Zorn 引理得证。

对于初学者来说，如果感到这里的证明太长而费解时，可以先跳过去也行。因为在§8中，包括Zorn引理在内的几个著名定理的证明，将有一个较为简短的统一论述。

现在设 S 与 S' 为两个部分序集。如果有 S 到 S' 上的一个一一映射 f 存在，且 f 具有性质

$$x \leqslant y \text{ 必要而只要 } f(x) \leqslant f(y)$$

则说 S **相似于** S'，记为 $S \sim S'$，而 f 就叫做 S 到 S' 上的一个**保序映射**。S' 叫做 S 的**保序象**。

也如本节开始时所述，相似关系是一个等价关系。

思　考　题

1. 一个序集的真前段不一定都是 $A(x_0)$ 或 $A[x_0]$ 这样类型的。

2. 一个平面上所有的点可以在某种关系下构成一个序集。

3. 开区间（0，1）中所有的有理数在普通的"$\leqslant$"关系下构成一个序集 M，且具有下列三点性质：

（i）无极大与极小元素；

（ii）可数性；

（iii）稠密性。

凡具有此三性质的序集 N 必与 M 相似.

4. 开区间 $(0, 1)$ 在实数的“$\leqslant$”关系下是一个序集 M，它具有性质：

（i）无极大与极小元素；

（ii）M含一个可数子集 A_0 使对M中任意两个不同的元素 x，y 恒有 A_0 中元素位于其间；

（iii）M的任何真前段或为形$A(x_0)$或为形 $A[x_0]$这样的.

凡具有性质（i）—（iii）的序集必相似于 M（此种序集叫做开的1维连续统）.

5. 把4题中的条件（ii）换为较弱的条件

(ii)* M是稠密的，

则序集 $(0, 1) = M$仍具有性质(i)、(ii)*、(iii). 问具此三性质的序集是否必相似于M？

6. 举例说明4题中的条件(i)—(iii)是独立的，即有满足其中任二条而不满足另一条的序集存在.

7. 一个序集的若干个前段的交集仍为一个前段.

8. 例2中的自然数序集 S_1 具有性质：

（i）有极小元素，但无极大元素；

（ii）任何真前段均为形 $A(x_0)$ 这样的，任何非空真前段又均为形 $A[x_0]$ 这样的；

且具此二性质的序集必相似于 S_1.

9. 所有负整数在普通的“$\leqslant$”关系下构成一个序集M且具有性质：

（i）有极大元素，但无极小元素；

（ii）任何前段均为形 $A[x_0]$ 这样的，任何真前段又均

为形A(x_0)这样的；

且具此二性质的序集必相似于M.

10. 仿照上面的题，说明所有整数在普通的“$\leqslant$”关系下所构成的序集将由哪些条件来唯一确定（指在相似意义下是唯一的）.

11. 具有5题中性质（ii）*,（iii）的序集叫做连续序集. 可数序集恒为稠密序集的子集；稠密序集又恒为连续序集的子集；连续序集恒含有开的1维连续统为其子集.

12. 可数序集恒能与任意给定的稠密序集的一个子集相似.

参 考 书

Fraenkel, Abstract Set Theory, §§ 8—9.

§4. 序集与序型

为了区别不同类型的序集，对于两个能相似的序集就说它们的序型相等，或说它们有相同的序型；对于两个不能相似的序集，则说它们的序型不相等，或说它们的序型不同．更确切地，则有

序型的定义． 如果对每个序集都用一个唯一确定的符号与它对应，而此对应具有性质："当序集 M 与 N 分别对应符号 σ 与 τ 时，$M\sim N$ 必要而只要 $\sigma=\tau$"，则称此符号为该序集的**序型．** 实际上，每个符号是由彼此相似的序集作成的一个类所唯一确定的．

为便于论述起见，序集 M 的序型可记为 $\overline{M}$．于是序集 $M\sim N$ 必要而只要 $\overline{M}=\overline{N}$．非空有限序集的序型就用自然数的符号来表示；空集的序型以 O 表之；§3 的例 2 中的序集 S_1 的序型以 ω 表之．一般也用 σ，τ，…来表序型．

序型的加法． 设 σ，τ 为二序型（可以相等），M，N 分别为相应的序集，并不妨设 M 与 N 无公共元素．令 U 为 M，N 的并集，并在 U 中规定任意两个元素 x，y 的"$\leqslant$"关系如下：如果 x，$y\,\varepsilon\,M$ 且在 M 中有 $x\leqslant y$；或者 x，$y\,\varepsilon\,N$ 且在 N 中有 $x\leqslant y$；又或者 $x\,\varepsilon\,M$，

$y \varepsilon N$，则规定在U中有$x \leqslant y$。易知在此规定的“$\leqslant$”关系下，U成为一个序集，其序型$\rho=\overline{U}$就定义为σ与τ之**和**，记为$\rho=\sigma+\tau$。显然此定义与M, N的取法无关，即若$M \sim N', N \sim N'$（也不妨设M'与N'无公共元素），则仿上把M'与N'之并集定义成序集后，其序型仍应为ρ。这就是说，$\sigma+\tau$是由σ，τ所唯一确定的，故这样就定义了序型的加法运算。

由定义易知序型的加法不适合交换律。例如$1+\omega=\omega$，但$\omega+1 \neq \omega$，以图示之有：

ω： *， *， *， ……

$(\omega+1)$： *， *， *， ……；*

但由定义却不难验证

定理1．序型之加法适合结合律．即对任意三个序型σ，τ，ρ恒有

$$(\sigma+\tau)+\rho=\sigma+(\tau+\rho).$$

故此和即可记为$\sigma+\tau+\rho$。

序型的乘法．仍设$\sigma=\overline{M}$，$\tau=\overline{N}$，并设σ，τ均非0，即M，N均为非空的序集．在集合$M \times N$中规定任意两个元素(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的“$\leqslant$”关系如下：如果在N中有$y_1<y_2$；或者在N中有$y_1=y_2$但在M中有$x_1 \leqslant x_2$，则在$M \times N$中就规定$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$．于是易知$M \times N$即成为一个序集，其序型$\rho$就定义为$\sigma$与$\tau$之**积**，记为$\rho=\sigma\tau$。此定义显然与$M$，$N$的具体取法无关．最后再定义$\sigma 0=0 \sigma=0$，这

就定义了任意二序型的**乘法运算**。

当 τ 为有限序型 n 时，则显然有

$$\sigma n=\sigma+\sigma+\cdots+\sigma\ (\text{共}n\text{个}\sigma\text{相加}).$$

而且这对一般的乘积 $\sigma\tau$ 来说，只要把 n 个 σ 的“和”的概念推广成若干个 σ 的“**有序和**”的概念，便知道 $\sigma\tau$ 就等于若干个 σ 按序型 τ 的有序和。例如

$$\omega\omega=\omega+\omega+\omega+\cdots$$

$$2\omega=2+2+2+\cdots$$

$$\omega 2=\omega+\omega$$

由此附带看出序型的乘法不适合交换律，因为

$$2\omega=2+2+\cdots=\omega;\quad \omega 2=\omega+\omega\neq\omega,$$

故 $2\omega\neq\omega 2$。但由定义却不难验证下面的

定理 2．序型的乘法适合结合律：

$$(\sigma\tau)\ \rho=\sigma\ (\tau\rho)$$

故此积可记为 $\sigma\tau\rho$。

定理 3．序型的加法与乘法适合第一分配律：

$$\sigma(\tau+\rho)=\sigma\tau+\sigma\rho.$$

但第二分配律却不成立。例如有

$$(\omega+1)2=(\omega+1)+(\omega+1)=\omega+(1+\omega)+1$$
$$=\omega+\omega+1=\omega 2+1$$

$$\omega 2+2\neq\omega 2+1=(\omega+1)2$$

序型之基数．如果序型 $\sigma=\overline{M}$，则集合 M 的基数 $a=\overline{\overline{M}}$ 就叫做序型 σ 的基数，此定义显然与序集 M 的具体取法无关，即序型 σ 的基数是由 σ 所唯一确定的，

故 σ 的基数又可记为 $\overline{\overline{\sigma}}$。

例如：$\overline{\overline{\omega}}=d$；$\overline{\overline{\omega+\omega}}=d$；$\overline{\overline{\omega\omega}}=d$。可见不同的序型可能有相同的基数。这又引出下面的定义：

基数的型集。设 a 为一基数。所有的具有基数 a 的序型作成的集合叫做 a 的**型集**，记为 $T(a)$。

基数 a 的型集 $T(a)$ 既为一集合，故它又有基数 $\overline{\overline{T(a)}}$。试问此基数与 a 有何关系？乃有

命题1．对任何基数 a 恒有 $\overline{\overline{T(a)}}\leqslant 2^{a^2}$。

证明。当 a 为有穷基数时，$T(a)$ 只有一个元素，即或为符号 o 或为自然数符号 n，而无论 a 为 o 或为 n，恒有

$$1\leqslant 2^{a^2}=\begin{cases}2^{n^2}，当 a=n 时；\\ 1，当 a=o 时。\end{cases}$$

故此时已有 $\overline{\overline{T(a)}}\leqslant 2^{a^2}$。

当 a 为超穷基数时，可取定一个无穷集合 A 使 $a=\overline{\overline{A}}$。令 $S=A\times A$ 为所有这样元素

$$(x,\ y)，其中\ x,\ y\ \varepsilon\ A$$

所作成的集合，再令 Σ 为 S 的幂集合，$\Sigma=US$。

如果 $T(a)$ 为空集，则命题中的不等式已显然成立。故不妨设 $T(a)$ 非空集，而 σ 为 $T(a)$ 中任意一个序型，且 $\sigma=\overline{M}$。于是序集 M 与集合 A 同浓，即 M 的元素与 A 的元素之间有一个一一对应，从而可根据 M 中元素的次序关系在 A 中定义一个“$\leqslant$”关系，使 A

成为一个序集其序型恰为 σ。因为 A 中的这个次序关系是由序集 M，从而是由 σ 所引导出来的，故可把此次序关系明确地记为 $\leqslant_\sigma$。如果 τ 是 $T(a)$ 中另一个序型，则 τ 就可以在 A 中另外引导出一个次序关系 $\leqslant_\tau$。现在设 Ω 为 A 中所有可能定义的次序关系所作成的集合，自然 $\leqslant_\sigma$，$\leqslant_\tau$ 都是 Ω 中的元素。由此可知 $T(a)$ 的元素就与Ω的某些元素能建立一个一一对应：$\sigma\longleftrightarrow\leqslant_\sigma$。这就是说：$T(a)$ 同浓于 Ω 的一个子集，$\overline{\overline{T(a)}}\leqslant\overline{\overline{\Omega}}$。

今在 Ω 中任意取一个元素"$\leqslant$"，它就是A中的一个次序关系，而 A 在此关系下便成一个序集。现在就来考虑集合 $S=A\times A$ 中所有这样的元素 (x,y)，它适合条件 $x\leqslant y$（在序集 A 中）。所有这些元素就作成 S 的一个子集，记为 $S(\leqslant)$。如果"$\leqslant$"与"$\leqslant^*$"是Ω中两个不同的元素，则可断言子集 $S(\leqslant)$ 与 $S(\leqslant^*)$必不相同。因为"$\leqslant$"与"$\leqslant^*$"是A中两个不同的次序关系，所以在A中至少有两个元素 x_1，y_1 它们在此二关系下有不同的次序，比如是这样的：$x_1<y_1$，$y_1<^*x_1$，在此情况下，(x_1,y_1) 就应在 $S(\leqslant)$ 中而不在 $S(\leqslant^*)$ 中，从而便知$S(\leqslant)$与$S(\leqslant^*)$ 是 S 的不同子集。所以，Ω 中不同元素恒相应于 S 的不同子集，即Ω同浓于 $\Sigma=US$ 的一个子集，$\overline{\overline{\Omega}}\leqslant\overline{\overline{\Sigma}}$。因$A$的基数为 a，故 S 的基数为 $aa=a^2$。由 §2 定理 4 知Σ的基数等于2^{a^2}。所以便有

$$\overline{\overline{T(a)}} \leqslant \overline{\overline{\Omega}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma}} = 2^{a^2}.$$

证毕。

命题 2． $\overline{\overline{T(d)}} = c$。

证明．首先由命题 1 及 $d^2 = dd = d$，$c = 2^d$ 知

$$\overline{\overline{T(d)}} \leqslant 2^{d^2} = 2^d = c,$$

所以只要再证明 $c \leqslant \overline{\overline{T(d)}}$ 就够了。

以 ξ 表示所有整数在普通的$\leqslant$关系下所构成的序集的序型；以 n_1，n_2，…等表示有限序型．于是有序和

$$n_1 + \xi + n_2 + \xi + n_3 + \xi + \cdots$$

便是一个序型，记为 $\sigma(n_i)$。如果 m_1，m_2，…为异于 n_1，n_2，…的另一序列，即至少有一个有限序型 $m_s \neq n_s$，则有序和

$$\sigma(m_i) = m_1 + \xi + m_2 + \xi + m_3 + \xi + \cdots$$

必不同于 $\sigma(n_i)$，此可证之如下：

假若$\sigma(m_i) = \sigma(n_i)$．由于在有序和中结合律显然可适用，故可记

$$\sigma(m_i) = m_1 + \tau_1;\quad \sigma(n_i) = n_1 + \tau_1'$$

其中

$$\tau_1 = \xi + m_2 + \xi + m_3 + \xi + \cdots$$

$$\tau_1' = \xi + n_2 + \xi + n_3 + \xi + \cdots$$

此二序型所相应之序集均无极小元素．所以当 $\sigma(m_i) = \sigma(n_i)$时，必有

$$m_1 = n_1;\qquad \tau_1 = \tau_1'.$$

再令 $\tau_1=\xi+\tau_2$，$\tau_1'=\xi+\tau_2'$，并以 M，N，N^* 分别表 ξ，τ_2，τ_2' 所相应之序集，再以 $M+N$ 表 M 在前 N 在后而连成之序集，$M+N'$ 表 M 在前 N' 在后而连成之序集。于是 $M+N$ 有序型 τ_1，$M+N'$ 有序型 τ_1'。既已知 $\tau_1=\tau_1'$，故序集 $(M+N)\sim(M+N')$。由于序集 M 无极大元素，序集 N 与 N' 又均有极小元素，故又必有 $N\sim N'$，即 $\tau_2=\tau_2'$，故得出

$$m_2+\xi+m_3+\xi+\cdots=n_2+\xi+n_3+\xi+\cdots.$$

累用上法继续看下去就能不断得出

$$m_1=n_1,\ m_2=n_2,\ m_3=n_3,\ \cdots,\ m_s=n_s$$

此为矛盾。故 $\sigma(m_i)$ 不同于 $\sigma(n_i)$。

显然每个这样的序型 $\sigma(n_i)$ 均有基数 d，而这样的序型恰和自然数的序列 $(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ 一一对应。如把此序列简记为 $\{n_i\}$，则所有这样序列 $\{n_i\}$，$\{m_i\}$，…作成的集合就可以看作是定义在自然数集上而值在自然数集中的所有函数作成的集合，从而其基数为 $d^d=c$。这就证明了 $c\leqslant\overline{\overline{T(d)}}$。命题 2 得证。

思 考 题

1．设一个序型 $\sigma=\overline{M}$．如果在序集M中另外定义一个"$\leqslant^*$"关系如下：当 $x\leqslant y$（在原序集 M 中）时，就定义 $y\leqslant^* x$，则 M 在关系"$\leqslant^*$"下成另一序集，其序型记为 σ^*，叫做 σ 的逆．说明 σ^* 是由 σ 所唯一确定的，与 M 的具体取法无关．再

举例说明有的序型 σ 就等于它的逆 σ^*，有的序型 σ 则不等于它的逆 σ^*.

2. 有序和的概念可确切地定义如下：设 I 是一个序集，对于 I 中每一元素 i 有一个序数 $\sigma_i = \overline{M}_i$ 与之相应，且不妨设诸集合 M_i 彼此无公共元素．令 M 为诸 M_i 之并集．今在 M 中规定次序关系如下：如果 $x \varepsilon M_i$，$y \varepsilon M_j$ 而在 I 中有 $i \leqslant j$ 且在 $i=j$ 时有 $x \leqslant y$（在 $M_i = M_j$ 中），则规定在 M 中有 $x \leqslant y$．于是 M 成一序集，其序型就定义为诸 σ_i 按序型 $\overline{I}$ 之有序和，记为

$$\sum_{i \varepsilon I} \sigma_i$$

于是还有基数的等式如下：

$$\overline{\sum_{i \varepsilon I} \sigma_i} = \sum_{i \varepsilon I} \overline{\sigma}_i.$$

3. 对任意序型 σ，τ 有 $\overline{\sigma\tau} = \overline{\sigma}\,\overline{\tau}$.

4. 定理 3 可推广为

$$\tau\left(\sum_{i \varepsilon I} \sigma_i\right) = \sum_{i \varepsilon I} (\tau \sigma_i).$$

5. 如何直接定义任意有限多个序型 σ_1，σ_2，…，σ_n 的积 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$？即不从两个序型之积出发再用归纳法而定义 n 个序型之积.

6. 设 η 为 (0, 1) 中所有有理数作成的序集的序型，σ 为 (0, 2) 中所有有理数作成的序集的序型，τ 为诸序型 2 按 η 之有序和，则

$$\eta = \sigma \neq \tau.$$

又若 m 为非 o 的有限序型，ρ 为基数是 d 的任意序型，则还有

$$\eta m=\eta, \eta\omega=\eta; \quad \eta\eta=\eta; \quad \eta\rho=\eta.$$

7．设 λ 为开的1维连续统（0，1）的序型，θ 为闭的1维连续统［0，1］的序型，则

$$\lambda m, \ \lambda\omega, \ \theta m, \ \theta\omega$$

均不同于 λ 与 θ．其中 m 为非 o 的有限序型，但 $m \neq 1$．所有这些序型的基数均为 c．

8．任何序型 $\sigma=\overline{M}$ 均等于诸有限序型1按 σ 之有序和，即

$$\sigma=\sum_{i \varepsilon M} 1_i，\text{其中 } 1_i=1，\text{对每个 } i \varepsilon M.$$

§5. 整序集与序数

整序集. 如果一个序集的任意非空子集（作为序集）恒有极小元素，则此序集就叫做一个整序集.

显然空集就是一个整序集，因为空集为一个序集，而且它不含任何非空子集；任何有限序集均为整序集；所有自然数构成的序集 S_1（§3例2）是一个整序集；所有负整数在普通的≤关系下是一个序集，但不是整序集，因为它自己就没有极小元素，此序集的序型是 S_1 的序型 ω 的逆，记为 ω^*；凡具有序型 $\omega+m$，$\omega+\omega$，$\omega\omega$ 的序集均为整序集.

由定义不难验证

命题1. 整序集的任意子集（作为序集）仍为整序集.

命题2. 整序集的保序象仍为整序集.

以上二命题请读者自证.

命题3. 序集 W 为整序集必要而只要 W 的真前段均为形 $A(x_\circ)$ 这样的.

证明. 如果 A 是整序集 W 的一个真前段，则有 $x \varepsilon W$ 使 A 中元素均 $<x$，所有这样的 x 作成 W 的一个非空子集 T. 由定义知 T（作为序集）有极小元素 $x_\circ$，

于是显然有$A\subset A(x_0)$.再任取$\beta\varepsilon A(x_0)$，则$\beta<x_0$，从而$\beta\not\in T$，所以β就不能大于A中所有元素，故有$y\varepsilon A$使$\beta\leqslant y$，由A为前段知必有$\beta\varepsilon A$。这又证明了$A(x_0)\subset A$。故$A=A(x_0)$，即知W的任何真前段均为形$A(x_0)$这样的。反之，设序集W的任何真前段均为形$A(x_0)$这样的。任取W的一个非空子集T来看。W中所有这样的元素x

"$x<T$中所有元素"

显然作成W的一个真前段，故可设其为$A(x_0)$。于是x_0必在T中，且x_0为T中极小元素。这就证明了序集W为整序集。

命题4。序集W为整序集必要而只要W不含这样的子集其序型为ω^*（序型ω之逆）。

因为这样的子集（作为序集）不含极小元素，故整序集恒不含这样的子集。反之，如果序集W不含这样的子集，则W的任何非空子集T必有极小元素，否则T就会包含这样一个子集，故W为整序集。

命题5。任何非空整序集W恒有（唯一的）极小元素，叫做W的**起始元素**。

此命题显然成立。

现在设W为一个非空整序集，A为W的一个非空子集。如果W中有元素x存在，它大于A中所有元素，则所有这样的x就作成W的一个非空子集T，故T有极小元素。此极小元素是由A所唯一确定的（如

果它存在的话，亦即有上述这样的 x 存在的话）。此元素就叫做 A 的**右邻**。空集的右邻定义为 W 的起始元素。当 A 只含一个元素 y 时，A 的右邻也叫元素 y 的右邻。同理可定义子集与元素的**左邻**，如果存在的话。

命题 6．整序集的真前段恒有右邻。

因由命题 3 知真前段恒为形 $A(x_0)$ 这样的，显然 x_0 就是 $A(x_0)$ 的右邻。空集作为整序集来说，它没有真前段，所以命题 6 对它来说也成立。其实对命题 3 也早就作这样的理解了。

现在就设 W 为一非空整序集。用 β_0 表 W 的起始元素；如果 $\{\beta_0\} \neq W$，则它为真前段，从而有右邻，以 β_1 表之；如果 $\{\beta_0, \beta_1\} \neq W$，则由 $\{\beta_0, \beta_1\} = A[\beta_1]$ 知它又为真前段，从而又有右邻，以 β_2 表之；如此继续下去，若止于某步，则 W 即为一有限序集：

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n;$$

若永无止境，则 $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots\}$ 为 W 的一个前段。如果此前段等于 W，则 W 即为一可数整序集：

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots;$$

如果此前段还不等于 W，则它为真前段，故又有右邻，记为 β_ω；若 β_ω 还有右邻，则记为 $\beta_{\omega+1}$，以此类推。于是 W 的元素可排成

$$\beta_0, \beta_1, \cdots; \beta_\omega, \beta_{\omega+1}, \cdots; \beta_{\omega 2}, \beta_{\omega 2+1}, \cdots$$

一直排到不再有右邻时为止。这就是非空整序集较为直观的形象。

下面我们将用Zorn引理来证明整序定理，不过在历史上却是先有整序定理而后才有Zorn引理的。在§8中还将对这些彼此等价的定理的证明给出一个较为简短的统一论述。如果初学者对下面的证明感到较长而难掌握，则还可以跳过去，如同前面对待Zorn引理那样，先知道结果就行了。

整序定理. 任何集合 Σ 均可排成一个整序集。

证明。首先知道 Σ 的一些子集，比如空集，有限子集等，总是可以排成整序集的。今考虑 Σ 的子集所排成的一切整序集所作成的集合 $S=\{W\}$。只要能证明 S 中有一个元素 W^*（整序集）它能包含 Σ 的全部元素就行了。

今在 S 中规定一个关系"$\leqslant^*$"如下：

$$W_1\leqslant^* W_2\ (\text{当}\ W_1\ \text{为}\ W_2\ \text{的一前段时}),$$

这样一来，S 就成为一个部分序集了。设

$$\cdots,\ W,\cdots \qquad (1)$$

为S中任意一个单线子集，将证明它在S中必有上界。命W_0为（1）中所有W的并集。然后在W_0中规定一个次序关系"$\leqslant^\circ$"如下：当x，$y\varepsilon W_0$时，（1）中就有某两个整序集分别含此二元素，不妨设为 $x\varepsilon W_x$，$y\varepsilon W_y$。由于（1）中任二整序集均有关系"$\leqslant^*$"，故必有一个是另一个的前段。比如W_x是W_y的前段，则x，$y\varepsilon W_y$，从而在整序集W_y中它们有$\leqslant$关系，比如是$x\leqslant y$。这时就在W_0中规定$x\leqslant^\circ y$。此规定与W_y

的取法无关，因若 x，y 又同在 (1) 中某整序集 W 中，则 W 与 W_y 必有一个为另一个的前段，于是当在 W_y 中有 $x\leqslant y$ 时，在 W 中也应有 $x\leqslant y$. 所以在关系“$\leqslant°$”下，$W_。$成为一个序集．今断言(1)中每个W不仅是新序集 $W_。$的子序集，而且W作为 $W_。$的子序集和它原来就作为一个整序集，两者是一致的．这是因为$W_。$中的关系“$\leqslant°$”限定在W 中时就与整序集 W 原有的关系“$\leqslant$”是一致的. 进一步，还可断言W是$W_。$的前段．因若 $\beta\,\varepsilon W$，$x\leqslant°\beta$ ($x\varepsilon W_。$)，则有 (1) 中的W_x含 x，而W_x与W必有一个是另一个的前段，故当 W_x 为W之前段时，自然便有 $x\varepsilon W$；当W为 W_x 之前段时，按前段的定义以及在 W_x 中有 $x\leqslant\beta$，又知 $x\,\varepsilon W$. 所以W 为 $W_。$的前段. 现在再证$W_。$为整序集．设 T 为 $W_。$的任意非空子集，于是 T 必与 (1) 中某个W之交非空，从而 $T\cap W$ 为整序集W 的非空子集，令其极小元素为 y，则 y 不仅是 $T\cap W$ 的，而且是 T 的极小元素，假若不然，有 T 中的 t 使 $t<°y$，则由于W是 $W_。$的前段而 $y\,\varepsilon W$ (因 $y\,\varepsilon\, T\cap W$)，故 $t\,\varepsilon W$，从而又有 $t\,\varepsilon\, T\cap W$，即在 $T\cap W$ 有 $t<y$，此为矛盾．这就证明了$W_。$为整序集．于是 $W_。$成为 S 中的一个成员，上面又指出过 (1) 中每个W都是 $W_。$的前段，故在 S 中有 $W\leqslant^* W_。$，即 $W_。$为单线子集 (1) 的上界．按 Zorn 引理知 S 含极大元素，设为W^*．今断言 W^* 必已包含Σ的全部元素，否则将有 $x\,\varepsilon\,\Sigma$ 而 $x\,\bar{\varepsilon}\,W^*$，把 x 添在

M^*后面就构成一个新的更大的整序集εS，与W^*的极大性矛盾。整序定理得证。

下面即将证明另一个重要的所谓整序集基本定理。为此先有

引理1. 整序集W到它的一个前段A上的保序映射f必为恒等映射。

用反证法。假若f不是恒等映射

$$f(x)=x,\ 对每个\ x\varepsilon W,$$

则有$x\varepsilon W$使$f(x)\neq x$，于是所有这样的x就作成W的一个非空子集T，设其极小元素为β，则有$f(\beta)\neq\beta$。由β之极小性知凡小于β的x均合于$f(x)=x$，故β的映象$f(\beta)$就不可能小于β，即必有$\beta<f(\beta)$。由于$f(\beta)\ \varepsilon A$而A又为前段，故$\beta\varepsilon A$，从而有某个$y\varepsilon W$使$f(y)=\beta$（因为f是从W到A上的映射）。由$f(y)=\beta$以及$\beta<f(\beta)$即知$y\neq\beta$，$f(y)\neq y$。于是应有$y\varepsilon T$，由β之极小性知$\beta<y$，再由f之保序性知$f(\beta)<f(y)$，即又得$f(\beta)<\beta$，此为矛盾。故f必为恒等映射。引理1得证。

引理2. 设U为整序集W的一个前段；U'与V'为整序集W'的两个前段。如果有U到U'上的保序映射f和U到V'上的保序映射g存在，则必有$U'=V'$且f与g相同。

因为U'与V'必有一个为另一个的前段，故不妨设V'是U'（作为整序集）的一个前段。看

$$U' \xrightarrow{f^{-1}} U \xrightarrow{g} V',$$

即知有 U' 到它的前段 V' 上的一个保序映射存在，故由引理 1 知此为恒等映射，从而 $U' = V'$ 且由上式看出：对每个 $x \varepsilon U'$ 有

$$g f^{-1}(x) = x,$$

即知 $g = f$。证毕。

引理 3．设 f 为整序集 W 到整序集 W' 上的保序映射，$W \sim W' = f(W)$．如果 U 是 W 的前段，则 $f(U)$ 是 W' 的前段。

因当 $\beta' \varepsilon f(U), x' \leqslant \beta' (x' \varepsilon W')$ 时，就有 $x \varepsilon W$，$\beta \varepsilon U$ 使 $f(x) = x'$，$f(\beta) = \beta'$，且由 f 之保序性知必有 $x \leqslant \beta$，于是再由 U 为前段知 $x \varepsilon U$，从而 $x' \varepsilon f(U)$，即知 $f(U)$ 为 W' 之前段．证毕。

整序集基本定理．任意两个不相似的整序集必有一个相似于另一个的一个真前段。

证明．设 W 与 W' 为两个不相似的整序集．考虑 W 的这样一些前段 U，它能相似于 W' 的某个前段 V，$U \sim V$．任取两个这样的前段 U_1 与 U_2，则有 W' 的前段 V_1 与 V_2 使 $U_1 \sim V_1$，$U_2 \sim V_2$．于是即有 U_1 到 V_1 上的一个保序映射 f 和 U_2 到 V_2 上的一个保序映射 g 存在，使

$$U_1 \xrightarrow{f} V_1 = f(U_1);\quad U_2 \xrightarrow{g} V_2 = g(U_2).$$

因为 U_1 与 U_2 必有一个是另一个的前段，故不妨设 U_1 为 U_2（作为整序集）的前段．由引理 3 知 $g(U_1)$ 为

V_2（作为整序集）的前段，从而为W'的前段. 再由引理2及

$$U_1 \xrightarrow{f} V_1; \quad U_1 \xrightarrow{g} g(U_1)$$

即知$g(U_1)=V_1$且在U_1上f与g相同. 所以g可视为f在U_2上的开拓.

现在令U^*为所有这些U的并集，V^*为所有这些相应的V的并集. 于是U^*与V^*分别是W与W'的前段，而且根据上面断言的开拓情况，就不难定义一个从U^*到V^*上的保序映射，它在U_1上与f一致，在U_2上与g一致，其余类推. 于是便有$U^* \sim V^*$. 可断言或$U^*=W$或$V^*=W'$. 假若不然，则U^*与V^*分别在W与W'中有右邻β与β'，于是可推出前段$A[\beta] \sim A[\beta']$，此与U^*为所有这样前段的并集相矛盾. 故不妨设$U^*=W$，于是W便相似于W'的前段V^*. 显然V^*必为真前段，否则便有$W \sim W'$而与所设矛盾. 证毕.

序数. 整序集的序型就叫做序数，无穷整序集的序型又叫做**超穷序数**；而全部**有限序数**则为0，1，2，….

既然序数为特殊的序型，故自然就能相加、相乘，而且还有下面的

命题7. 序数σ，τ之和$\sigma+\tau$与积$\sigma\tau$仍为序数.

命题8. 诸序数σ_i（$i \varepsilon$整序集I）**之整序和**

$$\sum_{i \in I} \sigma_i$$

仍为序数。

命题 7 显然为命题 8 之特例，故只证后者即可。亦即证明：在§4的2题中，如果诸 M_i 及 I 均为整序集，则M亦然。

任取M的一个非空子集T，则T必与某些M_i之交非空。由于 I 为整序集，故这些i中必有极小者，设为i_0。于是$T \cap M_{i_0}$非空，它又是整序集M_{i_0}的子集，从而含极小元素β，此β显然就是T中极小元素。故M为整序集。证毕。

序数之大小．设序数$\sigma = \overline{W}$，$\tau = \overline{W'}$．当W相似于W'的前段A时，就说σ小于等于τ，记为$\sigma \leqslant \tau$；或说τ大于等于σ，记为$\tau \geqslant \sigma$.当$\sigma \leqslant \tau$而$\sigma \neq \tau$时，说σ小于τ，记为$\sigma < \tau$；或说τ大于σ，记为$\tau > \sigma$。显然在此时，$\sigma < \tau$必要而只要A为W'的真前段。

引理 4．对于任意两个序数σ与τ，下列三式恰有一个成立：

$$\sigma < \tau, \quad \sigma = \tau, \quad \sigma > \tau.$$

证明。“有一个成立”是显然的。要证明“只有一个”又只要证$\sigma < \tau$与$\tau < \sigma$不能同时成立就够了。假若同时成立，而$\sigma = \overline{W}$，$\tau = \overline{W'}$，则W相似于W'的真前段，W'又相似于W的真前段，于是由§3命题 2 及引理 3 即知W相似它自己的一个真前段，此

与引理 1 矛盾。

引理 5．若 $\sigma\leqslant\tau$，$\tau\leqslant\rho$，则 $\sigma\leqslant\rho$；又若前二式之一出现“$<$”，则 $\sigma<\rho$。

可仿用引理 4 之证明。

引理 6．若干序数作成的非空集合 S 中必有极小序数存在。

证明．在S中任取 $\sigma=\overline{W}$。如果 σ 不是极小的，则有 $\tau_1 \varepsilon S$ 使 $\tau_1<\sigma$。令 $\tau_1=\overline{W}_1$，则W_1相似于 W 的一个真前段．由命题 3 知此真前段可记为 $A(\beta_1)$。显然对 S 中不同的 τ_1与τ_2，只要 $\tau_1<\sigma$，$\tau_2<\sigma$，则 τ_1 与τ_2将对应W的不同的真前段，从而对应不同的β_1与 β_2，且当$\tau_2<\tau_2$时，在W中就有 $\beta_1<\beta_2$.由于 W为整序集，故在所有这些相应元素（β_1，β_2 等）作成的子集 T 中就有极小元素，设为 β_0，于是与 β_0相应的那个序数 τ_0就是 S 中的极小序数．证毕。

由引理 4、5、6 即得

定理 1．若干个序数作成的集合恒自然地为整序集。

所谓“自然地为整序集”是指按照序数已有的大小次序关系形成整序集而言．

此外，从引理 6 的证明中，使我们看出：所有小于 σ 的序数（不管是否在 S 中）恰与W的元素一一相应，特别地，序数 o 相应于 W 的起始元素，而且较小序数相应较小元素。故有

定理2. 小于一个给定序数 σ 的一切序数作成的整序集（可用 $A(\sigma)$ 表之）的序数恰为 σ。亦即恒有

$$\overline{A(\sigma)}=\sigma,$$

无论 σ 为何序数（自然包括 $\sigma=o$ 在内）。

由此可知：如果整序集 W 的序数为 σ，则 $W\sim A(\sigma)$，且 W 的元素 β 相应的序数正好是前段 $A(\beta)$ 作为整序集的序数。从而 W 的元素可按其大小次序（从小到大）而分别记为：

$$\beta_o,\ \beta_1,\ \cdots;\ \beta_\omega,\ \beta_{\omega+1},\ \cdots;\ \beta_{\omega 2},\ \beta_{\omega 2+1},\cdots$$

其足指数恰取遍 $A(\sigma)$ 中所有的序数。这种表法显然是分析课程中经常用自然数为足指数来表达一个序列

$$\{x_i\}\quad i=1,\ 2,\ \cdots$$

的一种推广。故现在也可以记为 $W=\{\beta_i\}$。

另一方面，定理2告诉我们，如果在讨论序数而需要联系到整序集时，则不妨就取 $A(\sigma)$ 这样的整序集，而更简便。

极限数与非极限数. 当序数 σ 无左邻时，即没有序数 τ 存在使 $\sigma=\tau+1$，则 σ 便叫做一个极限数；有左邻时，叫做非极限数。

例如 ω 便是一个极限数；$\omega+1$ 便是非极限数。一个序数 σ 为极限数必要而只要 $A(\sigma)$ 中无极大序数。

命题9. 如果 S 是若干个序数作成的集合且其中无极大序数，则必有序数 σ 存在使

（i）$\sigma>S$ 中所有的序数；

（ii）任何小于 σ 的序数 ρ 必小于 S 中某个序数，从而就小于 S 中无穷多个序数.

证明. 如果 A 是所有这样序数 τ 作成的整序集：$\tau \leqslant S$ 中某个序数，则 $\sigma=\overline{A}$即为所求者. 首先，若 $\sigma<S$ 中某个序数，则 $\sigma \varepsilon A$，从而 $A(\sigma)$ 为A的真前段，故

$$\sigma=\overline{A(\sigma)}<\overline{A}=\sigma,$$

此为矛盾. 所以（i）成立. 其次，设 $\rho<\sigma$. 假若 $\rho>S$ 中所有序数，则

$$A \subset A(\rho) \subset A(\sigma),$$

由A之定义易验证A是 $A(\sigma)$ 的真前段，于是

$$\overline{A}<\overline{A(\sigma)} \text{ 或 } \sigma<\sigma,$$

此亦为矛盾. 故（ii）中第一断言成立. 至于第二断言即可由 S 中无极大序数而知. 证毕.

命题 9 中的 σ 显然就是一个极限数，而且其性质（i）与（ii）恰和数学分析中一个恒增序列的极限的性质一样，所以我们亦记

$$\sigma=\lim_{\sigma_\nu \varepsilon S} \sigma_\nu \quad \text{或} \quad \sigma=\lim \sigma_\nu.$$

另一方面，对每个极限数 σ 显然有

$$\sigma=\lim_{\sigma_\nu \varepsilon A(\sigma)} \sigma_\nu$$

故把无左邻的序数叫做极限数是很自然的.

序数前段. 设 A 是若干个序数作成的集合. 如果当 $\sigma \varepsilon A$ 而 $\tau \leqslant \sigma$ 时便有 $\tau \varepsilon A$，则 A就叫做一个序数前段.

序数前段自然都是整序集。定理 2 中的 $A(\sigma)$ 就是一个序数前段，其序数为 σ。反之，若 A 是一个序数前段，且其序数为 σ，则必有 $A=A(\sigma)$。因当 A 含极大序数 τ 时，显然就有 $\tau+1=\sigma$，而 $A=A(\sigma)$；当 A 不含极大序数时，只要把 A 看作命题 9 中的 S 就不难得出 $A=A(\sigma)$。这就证明了

命题10。若干个序数的集合 A 为一序数前段必要而只要有序数 σ 使 $A=A(\sigma)$。

思 考 题

1. 如果 f 为整序集 W 到它自己内的一个保序映射，则对任何 $x\varepsilon W$ 恒有 $f(x)\geqslant x$(Zermelo 定理).

2. 整序集 W 的子集恒相似于 W 的前段.

3. 对于任意基数 a 与 b，下列三式恰有一个成立：

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a.$$

此为 §1 题 1 的进一步.

4. 任何超穷序数 σ 必可表为 $\sigma=\omega+\tau$，而 τ 仍为序数.

5. 整序集恒不能相似于其真前段，但无穷整序集恒能相似于它的某些真子集.

6. 序集 W 叫做双重整序集，如果 W 的任何非空子集均有极小与极大元素. 双重整序集恒为有限序集.

7. 若干个序数前段之并集仍为序数前段；任二序数前段必有一个是另一个的前段.

8. 给定一组序数后，恒有大于所有这些序数的序数存

在.

9. 设$\tau=f(\sigma)$是序数的一个单值函数. 如果f具有性质:

(i) 当$\sigma_1<\sigma_2$时, 就有$f(\sigma_1)<f(\sigma_2)$;

(ii) $f(\lim\sigma_\nu)=\lim f(\sigma_\nu)$,

则f便叫做一个正规函数. 于是$\rho+\sigma$, $\rho\sigma$ $(\rho\neq 0)$均为σ的正规函数; 又问$\sigma+\rho$ $(\rho\neq 0)$, $\sigma\rho$, $\sigma\sigma$是不是σ的正规函数?

10. 正规函数f恒具有性质$f(\sigma)\geq\sigma$. 此可视为题1之推广.

11. 如果$\sigma<\tau$, 则有

$$\rho+\sigma<\rho+\tau,\ \sigma+\rho\leqslant\tau+\rho,\ \rho\sigma<\rho\tau\ (\rho\neq 0).$$

又若$\rho+\sigma<\rho+\tau$或$\sigma+\rho<\tau+\rho$或$\rho\sigma<\rho\tau$或$\sigma\rho<\tau\rho$, 则$\sigma<\tau$.

12. 如果$\rho>\sigma$, 则有唯一的τ使$\rho=\sigma+\tau$, 并举例说明: 未必有τ使$\rho=\tau+\sigma$, 而且即使有亦未必唯一.

参 考 书

Fraenkel, Abstract Set Theory, §§10—11.

§6. 超穷归纳法

从上节看出整序集与自然数序列类似而为其推广，本节将介绍对整序集也有类似于关于自然数的数学归纳法的处理问题的方法而为其推广.

超穷归纳法原理. 设 W 是一个整序集，P 是一个性质. 如果下列命题成立：

"若 $x<\beta$ 时 x 具性质 P，则 β 亦具性质 P"

则 W 的所有元素均具性质 P.

证明. 假若 W 中有元素不具性质 P，则所有这样元素就作成 W 的一个非空子集，其中有极小者，设为 β，于是 β 不具性质 P，但小于 β 的均具性质 P，此矛盾于所设命题成立. 证毕.

由此可知：当要证 W 的所有元素均具性质 P 时，只要在

"$x<\beta$ 时，x 就具性质 P"

的假设下去证

"β 具性质 P"

就成了。

此外，还要指出的一点是，所设的命题成立时就已包括了这样的事实：

"W 的起始元素 β_0 具性质 P".

因为 W 中根本无元素小于 β_0，所以即可认为

"$x<\beta_0$ 时 x 就具性质 P",

从而当命题成立时，β_0 就应具性质 P 了.

如果**用序数来陈述超穷归纳法原理**则为：

设P 是一个性质. 如果下列命题成立：

"当小于 σ 的所有序数均具性质 P 时，σ 就具性质 P",

则任何序数均具性质 P.

这样陈述的形式，正好是数学归纳法的一种推广，因为数学归纳法只不过是把序数限定为有限序数罢了.

应用举例：

1° 证 Zermelo 定理（即§5思考题 1).

设 $x<\beta$ 时就有 $f(x)\geqslant x$，而证 $f(\beta)\geqslant\beta$. 用反证法. 假若 $\beta>f(\beta)$，令 $f(\beta)=\delta$，则由所设条件及 $\delta<\beta$ 知 $f(\delta)\geqslant\delta$，于是由 f 之保序性知 $f(\delta)<f(\beta)$，故得

$$\delta=f(\beta)>f(\delta)\geqslant\delta,$$

此为矛盾. 所以必有 $f(\beta)\geqslant\beta$. 按超穷归纳法原理即知：对所有 $x\varepsilon W$ 均有 $f(x)\geqslant x$.

2° 证明：整序集的序数$\geqslant$其子集的序数.

假设对于序数小于 σ 的整序集此命题成立，而对序数为 σ 的任一整序集 W 证此命题亦成立. 用反证

法。假若不然，W 含有一个子集其序数大于 σ，从而 W 必含有子集 A 其序数为$\sigma+1$。于是 A 必有极大元素 β，这是因为$\sigma+1$不是极限数的原故。令 A^* 为 A 中所有小于β的元素作成的集合，则 A^* 显然为整序集且其序数为 σ，但 A^* 又应含于W的真前段$A(\beta)$中，而 $A(\beta)$的序数应小于W之序数 σ，故由假设知 $A(\beta)$ 的任何子集的序数恒$\leqslant A(\beta)$ 的序数，特别地，应有 $\overline{A^*}\leqslant\overline{A(\beta)}$，从而得出

$$\sigma=\overline{A^*}\leqslant\overline{A(\beta)}<\overline{W}=\sigma,$$

此为矛盾。故对序数为 σ 的整序集命题亦成立。由超穷归纳法原理知命题成立。

此外还有所谓**超穷归纳法定义原理**，不在此细言了。

§7. 基数与序数的几个重要定理

本节将把基数与序数联系起来讨论，并把序数的理论用于解决基数中某些较困难的问题。

序数的乘方．设序数 $\sigma \neq 0$。定义 σ 的乘方如下：

1° $\sigma^0 = 1$；

2° 当 ρ 非极限数时，$\rho = \tau + 1$，定义 $\sigma^\rho = \sigma^\tau \sigma$；

3° 当 ρ 为极限数时，$\rho = \lim \rho_\nu$，定义

$$\sigma^\rho = \lim \sigma^{\rho_\nu}.$$

在此规定下不难验证：对每个序数 ρ 恒有唯一的序数 $f(\rho) = \sigma^\rho$ 与之相应，且此对应 f 具性质：

(i) 当 $\rho_1 < \rho_2$ 时，$f(\rho_1) < f(\rho_2)$，即 $\sigma^{\rho_1} < \sigma^{\rho_2}$；

(ii) $f(\lim \rho_\nu) = \lim [f(\rho_\nu)]$，即 $\sigma^{\lim \rho_\nu} = \lim (\sigma^{\rho_\nu})$。

可以不考虑 $\sigma = 1$ 这个意义不大的情形，因为此时可定义 1^ρ 恒为 1。

例 1．$m^\omega = \omega$（m 为有限序数且 $\neq 0, 1$）。

事实上，由§5命题9知有限序数的序列

$$S = \{m^0, m^1, m^2, m^3, \cdots\}$$

的极限数就是 ω。

例 2．$1 + \omega + \omega^2 + \cdots = \omega^\omega$。

因可设整序和

$$\sigma=1+\omega+\omega^2+\cdots,$$

于是对有限序数 m 恒有

$$\sigma>1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^m;$$

再由数学归纳法易证

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^m=\omega^m,$$

故由上之定义及§5命题9即知 $\omega^\omega\leqslant\sigma$。假若有 $\omega^\omega<\sigma$，则必有某 m 使

$$\omega^\omega<1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^m，即\ \omega^\omega<\omega^m,$$

此为矛盾。故必有 $\sigma=\omega^\omega$，即

$$1+\omega+\omega^2+\cdots=\omega^\omega.$$

命题1（指数定律）. $\sigma^\rho\sigma^\tau=\sigma^{\rho+\tau}$，$(\sigma^\rho)^\tau=\sigma^{\rho\tau}$。

证明。对 τ 用超穷归纳法。设对 $\tau^*<\tau$ 时已有 $\sigma^\rho\sigma^{\tau^*}=\sigma^{\rho+\tau^*}$，而证 $\sigma^\rho\sigma^\tau=\sigma^{\rho+\tau}$即可。

情形1°。当 τ 非极限数时，$\tau=\tau_0+1$，则有

$$\sigma^\rho\sigma^\tau=\sigma^\rho\sigma^{\tau_0}=\sigma^{\rho+\tau_0}\sigma=\sigma^{\rho+\tau_0+1}=\sigma^{\rho+\tau};$$

情形2°。当 $\tau=\lim\limits_\nu\tau_\nu$ 时，则仍有

$$\begin{aligned}\sigma^\rho\sigma^\tau&=\sigma^\rho(\lim_\nu\sigma^{\tau_\nu})=\lim_\nu(\sigma^\rho\sigma^{\tau_\nu})\\&=\lim_\nu(\sigma^{\rho+\tau_\nu})=\sigma^{\lim\limits_\nu(\rho+\tau_\nu)}=\sigma^{\rho+\lim\limits_\nu\tau_\nu}\\&=\sigma^{\rho+\tau}.\end{aligned}$$

同理可证 $(\sigma^\rho)^\tau=\sigma^{\rho\tau}$。

还有一条指数定律对序数的乘方不成立，即$(\sigma\tau)^\rho$未必等于 $\sigma^\rho\tau^\rho$。例如

$$(\omega5)^2=\omega5\omega5=\omega\omega5=\omega^25;$$

$$\omega^2 5^2 = \omega^2 (25),$$

故由 $\omega^2 5 \neq \omega^2 (25)$ 知 $(\omega 5)^2 \neq \omega^2 5^2$。

序数的乘方曾经在历史上起过很重要的作用，例如对基数的运算起极大简化作用的著名的 Hessenberg 定理（对任何超穷基数 a 恒有 $a^2 = a$）的早期证明就依靠了序数的乘方。不过现在已有非常简捷的方法来证此著名定理。现在证明的篇幅约只相当于过去的三分之一。所以在后面证明此定理时，我们就不再用序数的乘方了。序数乘方的引进只是作为介绍一个基本概念，使序数与基数的运算能完全对照起来。当然，序数乘方的概念在近代的超穷数论中还是很重要的。

现在我们再回到基数的问题。在§1中，由 Cantor 定理知基数有无穷多个（存在性问题）。再由 Bernstein 定理知给定两个基数 a 与 b 后，下列三式最多只能有一个成立：

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b.$$

这解决了部分次序性问题，即若干个基数作成的集合自然就是一个部分序集。但一直到§5有了整序定理和整序集基本定理以后，才知道任意两个基数均可比较大小（单线次序问题）。故到现在，我们便可断言：任何一组基数恒自然地形成一个序集。于是进一步希望知道：它是什么序集？这就要应用序数的理论。为此，首先有下列定义：

序数之基数. 即整序集之基数（参看§4序型之基数）.

基数之数类: 设a是一个给定的基数. 所有以a为基数的序数作成的集合叫做a的**数类**，记为$Z(a)$. 它自然为一非空整序集，其起始元素（即其中最小序数）叫做数类$Z(a)$的**首数**，或简曰a的首数，记为$\sigma(a)$. 此外，所有有限序数作成的集合，特称为**第一数类**；而$Z(d)$则特称为**第二数类**.

由定义易知不同的基数a与b将对应不同的序数$\sigma(a)$与$\sigma(b)$，而且$a<b$必要而只要$\sigma(a)<\sigma(b)$. 即得

定理1. 基数a与其首数$\sigma(a)$的对应是一对一而保序的.

此定理附带就回答了上述问题，即任意一些基数恒自然地构成一个整序集.

今后我们用符号$\aleph$来表超穷基数. 由上结论知：小于等于某个给定的超穷基数的所有超穷基数可按大小次序排成整序集如下：

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots\cdots$$

其中$\aleph_0 = d$，因d显然为最小的超穷基数. 进一步还有下面的

定理2. 对于每一序数ρ恒可相应一超穷基数$\aleph_\rho$，使此对应是一对一而保序的. 且在此对应下，没有一个超穷基数会被漏掉.

证明. 假设对所有小于 ρ 的序数 τ 已有 $\aleph_\tau$ 相应，且此对应具有性质 P：

"此对应是一对一而保序的，且对任意两个相邻的 $\aleph_\tau$ 与 $\aleph_{\tau+1}$ ($\tau+1<\rho$) 之间不能再插入任何基数 $\aleph$ 使 $\aleph_\tau<\aleph<\aleph_{\tau+1}$"，

则易知有基数存在（参看§2 思考题 12），它大于所有的 $\aleph_\tau$ ($\tau<\rho$)。取这样一个极小基数，定义之为 $\aleph_\rho$，于是序数前段 $A(\rho+1)$ 中的每个序数 τ 都有 $\aleph_\tau$ 与之相应，且此相应仍具性质 P. 按超穷归纳法原理即知定理得证。

为了使定理 2 更直观一些，我们用一些不严格的话来描述它，即：所有超穷基数可以按大小次序排成一个没有止境的整序集如下：

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots;\ \aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1},\ \aleph_{\omega+2},\ \cdots\cdots$$

我们已知连续统的基数 $c>\aleph_0$，因此不免要问它排在哪里，即 c 等于哪个 $\aleph_\rho$? Cantor (1878) 猜想而设 $c=\aleph_1$，此即所谓**连续统假设**. 又因为 $c=2^d=2^{\aleph_0}$，而一般还有 $\aleph_\rho<2^{\aleph_\rho}$，故同样可问 $2^{\aleph_\rho}$ 是否就等于 $\aleph_{\rho+1}$，此又引出所谓

广义连续统假设：$2^{\aleph_\rho}=\aleph_{\rho+1}$.

一般习惯把 c 记为 $\aleph$ 而不标足指数。不过在下面，为了简便起见，我们仍用 $\aleph$ 表一般超穷基数，而以 $Z(\aleph)$ 与 $\sigma(\aleph)$ 分别表其数类与首数。

连续统假设与下一节要讲的选择公理都是在所谓

Zermelo—Franenkel 公理集合论里所不能证明的，这是 P. J. Cohen (1963—1966) 的著名工作（参看§11)。此二者之间并无推导关系。但广义连续统假设不仅包括了连续统假设，而且早在 1947 年 Sierpinski 就证明了它可以推出选择公理。

命题 2。$\sigma(\aleph)$恒为极限数；而且当$\aleph>\aleph_0$时，$\sigma(\aleph)$ 还是极限数的极限数，即

$$\sigma(\aleph)=\lim_{\nu}\rho_{\nu},$$

其中 $\{\rho_{\nu}\}$ 为一串极限数。

证明。显然 $\sigma(\aleph_0)=\omega$ 为极限数，故只要证明对任意小于 $\sigma(\aleph)$ 的极限数 ρ 恒有极限数 τ 使

$$\rho<\tau<\sigma(\aleph) \tag{1}$$

就行了。既然$\rho<\sigma(\aleph)$，故$\overline{\rho}<\aleph$。假若ρ与$\sigma(\aleph)$之间不存在极限数，则必有

$$\rho+\omega=\sigma(\aleph) \tag{2}$$

在(2)的两边取基数得$\overline{\rho}+\aleph_0=\aleph$，即得$\overline{\rho}=\aleph$，此为矛盾。故必有极限数 τ 使（1）成立。证毕。

推论。对任意$\aleph$恒有 $2\aleph=\aleph$。

证明。首先易知$2\aleph_0=\aleph_0$。其次，当$\aleph>\aleph_0$时，由命题 2 知有

$$\sigma(\aleph)=\lim_{\nu}\rho_{\nu},\quad \overline{\rho_{\nu}}<\aleph。$$

假设推论中的等式对所有小于$\aleph$的基数已成立。现在看

$$2\sigma(\aleph)=2(\lim_{\nu}\rho_{\nu})=\lim_{\nu}(2\rho_{\nu}) \tag{3}$$

由假设知对每个ν恒有

$$\overline{2\rho_\nu} = 2\overline{\rho_\nu} = \overline{\rho_\nu} < \aleph,$$

而极限数$2\sigma(\aleph)$又是大于所有$2\rho_\nu$的序数中的最小者（参看§5 命题 9），故由上式及（3）便有

$$2\aleph = \overline{2\sigma(\aleph)} \leqslant \aleph,$$

但显然又有$\aleph \leqslant 2\aleph$，故$2\aleph = \aleph$。在定理 2 的基础上按超穷归纳法原理来看，即知推论得证。

此推论也是超穷数论中著名的所谓**基数的倍等定理**。

命题 3．在第一数类与第二数类中任取一个上升序列（由序数作成的）：

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \cdots$$

后，其极限数（也称为序数集合$\{\sigma_i\}$的右邻）必仍在第二数类中。

因为一方面从整序和$\sigma = \Sigma\sigma_i$来看基数有

$$\overline{\sigma} = \Sigma\overline{\sigma_i} \leqslant \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0;$$

另一方面，任何极限数显然均应有基数$\geqslant \aleph_0$，而σ又大于所有的σ_i，故该极限数又应$\leqslant \sigma$，从而其基数又应$\leqslant \aleph_0$，所以该极限数的基数就是$\aleph_0$，即它是第二数类中的序数。证毕。

定理 3．$Z(\aleph_\rho)$的基数与序数恰好分别是与$\aleph_{\rho+1}$与$\sigma(\aleph_{\rho+1})$。

证明．由定义知整序集$Z(\aleph_\rho)$是由所有满足下列不等式的序数σ所作成的：

$$\sigma(\aleph_\rho) \leqslant \sigma < \sigma(\aleph_{\rho+1}).$$

因此，序数前段 $A(\sigma_{(\aleph_\rho)})$ 与 $Z(\aleph_\rho)$ 之并集恰为序数前段 $A(\sigma_{(\aleph_{\rho+1})})$，且有序数的等式如下：

$$\sigma(\aleph_\rho) + \overline{Z(\aleph_\rho)} = \sigma(\aleph_{\rho+1}).$$

在此等式两边取基数即得基数的等式如下：

$$\aleph_\rho + \overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} = \aleph_{\rho+1},$$

故 $\overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} \leqslant \aleph_{\rho+1}$。假若这不是等式，则有

$$\overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} < \aleph_{\rho+1} \text{ 或即 } \overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} \leqslant \aleph_\rho,$$

从而由上之推论（倍等定理）得

$$\aleph_\rho + \overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} \leqslant \aleph_\rho + \aleph_\rho = 2\aleph_\rho = \aleph_\rho,$$

此与上之等式矛盾。故必有 $\overline{\overline{Z(\aleph_\rho)}} = \aleph_{\rho+1}$。于是由基数之首数的定义知有

$$\overline{Z(\aleph_\rho)} \geqslant \sigma(\aleph_{\rho+1}),$$

但已有

$$\sigma(\aleph_\rho) + \overline{Z(\aleph_\rho)} = \sigma(\aleph_{\rho+1}),$$

从而又应有 $\overline{Z(\aleph_\rho)} \leqslant \sigma(\aleph_{\rho+1})$。这又证明了

$$\overline{Z(\aleph_\rho)} = \sigma(\aleph_{\rho+1}).$$

定理 3 至此全部证毕。

现在任意给定一个序数 σ。考虑所有小于 σ 的序数排成的一切“序数对” $\{i, j\}$ 所作成的集合，记为 $[\sigma, \sigma]$。在其中规定大小次序如下：对于任意两个这样的“序数对”：

$$\{i, j\} \text{ 与 } \{k, l\}, \ i, j, k, l \text{ 均} < \sigma,$$

如果有

1° $Max(i,j)=Max(k,l)$ 而 $i<k$；或者

2° $Max(i, j)=Max(k, l)$ 而 $i=k$ 但 $j<l$；或者

3° $Max(i, j)<Max(k, l)$，

则在 $[\sigma,\sigma]$ 中就规定 $\{i,j\}<\{k, l\}$，这样一来，易知 $[\sigma, \sigma]$ 便成为一个序集。

例如 $\sigma=\omega$ 时，$[\omega, \omega]$ 即下列序集：

$\{0, 0\}<\{0, 1\}<\{1,0\}<\{1, 1\}<\{0, 2\}<\cdots\cdots$。

命题4．$[\sigma, \sigma]$ 为整序集．

证明．设 T 为 $[\sigma, \sigma]$ 的任意非空子集．对 T 中每个元素 $\{i, j\}$ 有唯一的序数 $Max(i, j)$ 与之相应．设 ρ 为这些序数中的最小者．令

$$T_1=\left\{\{i, j\}:\ Max(i, j)=\rho,\ \{i, j\}\ \varepsilon\ T\right\},$$

则 T_1 中元素的第1坐标中又有最小者，设其为 k^*．再令

$$T_2=\left\{\{k^*, j\}:\ \{k^*,j\}\ \varepsilon\ T_1\right\},$$

则诸 j 中又有最小者，设其为 j^*．于是 $\{k^*, j^*\}$ 就是 T 中的最小元素．故 $[\sigma, \sigma]$ 为整序集．

定理4．如果 $\sigma\ \varepsilon\ Z(\aleph)$，则 $[\sigma, \sigma]$ 之序数仍在 $Z(\aleph)$ 中．

证明．用超穷归纳法．定理中的断言显然对 $\aleph_0$ 成立．假设定理对所有的 $\aleph_\nu\ (\nu<\tau)$ 已证明了．现在对 $\aleph_\tau$ 进行证明如下：首先证

$$\overline{[\sigma(\aleph_\tau), \sigma(\aleph_\tau)]}\ \varepsilon\ Z(\aleph_\tau).$$

任取$\{i,j\}\varepsilon[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]$。由于$\sigma(\aleph_\tau)$为极限数，而

$$i<\sigma(\aleph_\tau),\quad j<\sigma(\aleph_\tau)$$

故必有序数ρ_1与ρ_2存在使

$$i<\rho_1<\sigma(\aleph_\tau),\quad j<\rho_2<\sigma(\aleph_\tau).$$

令ρ为ρ_1与ρ_2中之大者，则i与j均小于ρ，而ρ又小于$\sigma(\aleph_\tau)$。所以$\{i,j\}$就在整序集$[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]$的前段$[\rho,\rho]$之中。因$\rho<\sigma(\aleph_\tau)$，故$\overline{\rho}<\aleph_\tau$，于是有$\nu<\tau$使$\overline{\rho}=\aleph_\nu$，从而知$\rho\,\varepsilon\,Z(\aleph_\nu)$。由超穷归纳法假设知

$$\overline{\overline{[\rho,\rho]}}\varepsilon Z(\aleph_\nu)\text{ 或 }\overline{\overline{[\rho,\rho]}}=\aleph_\nu.$$

由于$\{i,j\}\,\varepsilon\,[\rho,\rho]$，故整序集$[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]$的真前段$A(\{i,j\})$的基数$\leqslant\aleph_\tau$。因为$\{i,j\}$是任意取的，所以$[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]$的基数就$\leqslant\aleph_\tau$。但显然有

$$\overline{\overline{[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]}}=\aleph_\tau\aleph_\tau=\aleph_\tau^2\geqslant\aleph_\tau,$$

故得

$$\aleph_\tau^2=\overline{\overline{[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]}}=\aleph_\tau.$$

于是

$$\overline{[\sigma(\aleph_\tau),\sigma(\aleph_\tau)]}\,\varepsilon\,Z(\aleph_\tau).$$

进一步再任取$\sigma\,\varepsilon\,Z(\aleph_\tau)$，则有

$$\overline{\overline{[\sigma,\sigma]}}=\aleph_\tau\aleph_\tau=\aleph_\tau^2=\aleph_\tau,$$

从而也有

$$\overline{[\sigma,\sigma]}\varepsilon Z(\aleph_\tau).$$

超穷归纳法完成。定理得证。

在上面的证明中，附带看出有

$$\aleph^2 = \aleph$$

对任何超穷基数$\aleph$此等式均成立。这就是超穷论数中著名的 Hessenberg **定理**。此定理的早期证明的过程是很长而复杂的，用到了序数的乘方，序数的带余除法定则，非 o 序数由 ω 的幂的整系数右线性唯一表法，以及序数的所谓自然和等等相当复杂的结果。总之，在早期的超穷数论中，它是关于基数的一个相当深奥的定理。上面的证明应当说是经过相当大的简化的一个非常漂亮的证明。

思 考 题

1．不用定理 4 而直接证明

$$\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} > \aleph_0.$$

2．如果 a，b，c，d 为任意基数而且 $a<b$，$c<d$，则有

$$a+c<b+d,\quad ac<bd.$$

3．如果$\sigma\leqslant\tau$，则 $(\aleph_\sigma)^{\aleph_\tau}=2^{\aleph_\tau}$.

4．对任意序数 ρ 恒有$\overline{\rho}\leqslant\aleph_\rho$.

5．$\sum\limits_{\nu\leqslant\sigma}\aleph_\nu=\aleph_\sigma$.

6．如果σ为极限数，则$\sum\limits_{\nu<\sigma}\aleph_\nu=\aleph_\sigma$.

7．连续统基数$\aleph\neq\aleph_\omega$.

8．对任意序数 ρ 恒有 $\omega^\rho\geqslant\rho$．问此“$\leqslant$”符号能否换成

“<”符号?

9. 用ε_0表下面序数的序列

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \cdots$$

的极限数. 则有$\omega^{\varepsilon_0}=\varepsilon_0$.

10. 上面的ε_0仍在第二数类中.

§8. 选择公理及其等价命题

选择公理是 Zermelo (1904) 为证明整序定理而提出来的,这对近代数学理论的发展和逻辑上的严密性起了大为推进一步作用。Vitali (1905) 利用它造出了 [0, 1] 中的不可测集合; Zorn (1935) 又用它证明了**第一极大原理**(即 Zorn 引理),这个原理是应用起来最方便而特别受人欢迎的; Teichmüller (1939) 与 Tukey (1940) 又提出了**第二极大原理**(通常又称为 Tukey 引理)。今将此原理与选择公理分别陈述如下:

设 F 为若干个集合作成的一个类。如果对每个集合 X而言,$X \varepsilon F$ 之充要条件为X的有限子集恒 εF,这时就说 F 具**有限特征**。

Tukey 引理。设 F 为诸集合作成的一个非空的类。如果 F 具有限特征,则 F 含有极大元素。

这里的大小次序自然是按集合的包含关系"$\subset$"来说的。

选择公理。对若干个非空集合作成的每个类 F,恒存在一个函数 f (叫做 F 上的一个**选择函数**) 使对每个 $S \varepsilon F$ 有 $f(S) \varepsilon S$。

定理 1. 下列诸命题等价:

1° 选择公理；

2° 整序定理；

3° Zorn 引理；

4° Tukey 引理。

证明。用循环证法。

1°⇒2°。不妨设 S 为任意非空集合。令 f 为 S 的幂集合 $\mathrm{U}S$ 上的一个选择函数。再令

$$a_0=f(s), a_1=f(S-\{a_0\}), a_2=f(S-\{a_0,a_1\}),\cdots$$

假设对所有小于 σ 的序数 ν 已定义了 a_ν，则可定义

$$a_\sigma=f(S-\{a_\nu: \nu<\sigma\}).$$

这样定义尽 S 的元素后，S 即成整序集

$$a_0, a_1, \cdots, a_\sigma, \cdots$$

了（本证明也可以看作是独立于以前所推导出的结果，如 Zorn 引理与整序定理等，这只要认为是在 Von Neumann 所大力发展起来的序数理论上来看待问题就成了。所以前面早就指出过，对初学者来说，如果感到 Zorn 引理与整序定理的证明太长而费解时，则可以先跳过去，就只看这里的较为简短的统一论述就行了）。

2°⇒3°。设 S 为一部分序集。先把 S 整序化为

$$a_0, a_1, \cdots, a_\sigma, \cdots \ (\sigma<\tau)$$

然后令 $b_0=a_0$，$b_\nu=a_\rho$，其中 ρ 为升链

$$B=\{b_i: i<\nu\}$$

的上界中（因一般说来，上界不只一个）所对应的 a 的

足指数中的最小序数且 $a_\rho \not\in B$。如此下去，直到无法再作下去时，即得 S 的一个极大元素。

3°⇒4°。设类F为在"⊂"关系下的一个部分序集（现在可叫部分序类）。如果 C 是 F 中的集合排成的一个升链，则由有限特征易知并集

$$A = \bigcup \{X: X \varepsilon C\}$$

必属于 F，从而 A 就是 C 的一个上界。故 F 必有极大元素。

4°⇒1°。设 F 是由若干个非空集合作成的一个类。考虑

$$G = \{g: g \text{ 为 } F \text{ 的子类上的选择函数}\}$$

把一个选择函数看作一个集合时（即函数值作成的集合），其子集合显然即选择函数。由此易知 G 具有限特征，故有极大元素 f，于是 f 就必然是 F 上的一个选择函数。证毕。

定理 1 中的命题是数学上经常要用到而且为大家所乐于使用的几个主要而彼此等价的工具。除此以外，还有不少等价于它们的命题。从本世纪初一直到目前为止，就编者所知，还有如下一些等价命题：

5° **基数开方定理**：如果$a^2 = b^2$，则$a = b$；

6° **超穷基数等方定理** (Hessenberg)：$a^2 = a$；

7° **直积定理**：若干非空集合之直积非空（直积即 Cartesian Product）；

8° **Tychonoff 定理**：若干紧致空间之直积仍为紧

致空间；

9° **弱 Tychonoff 定理**：若干个拓扑同构的紧致空间的直积仍为紧致空间；

10° **交点唯一定理**：如果 F 为不交非空集之类，则有集合 M 存在，使对每个 $X \varepsilon F$，$M \cap X$ 恰含一个元素；

11° **极大不交子类存在定理**：任意类恒含一个由互不相交的集合作成的极大子类；

12° **格的极大理想定理**：每个有 1 及另一元素之格恒含极大理想；

13° **Boole 代数的极大理想定理**：对 Boole 代数 B 的每个由非 0 元组成之集 S，必存在一个与 S 不交的极大理想；

14° **Hausdorff 定理**：部分序集的任一链必包含在某一最大链中（链即单线子集）；

15° **多个选取公理**：对非空集作成的类 F 恒有 f 使 $f(X)$ 为 X 之有限子集（$X \varepsilon F$）；

16° **反链原理**：每个部分序集必有一个极大反链（即由互相不能比大小的元素作成的一个极大子集）；

17° **序集可整序定理**：每个序集恒可整序化之；

18° **整序集的幂集合可整序定理**：每个整序集的幂集合恒可整序化之；

19° **向量空间的相补定理**：任意向量空间 V 的子空间 S 有相补子空间 S' 使 $V = S \dot{+} S'$；

20° **投射原理**：对每个集合 S 及每个正常类 F，有 F 到 S 上的一个映射存在；

21° **内射原理**：对每个集合 S 及每个正常类 F，有 S 到 F 内的一个一一映射存在；

22° **基数可比定理**：任二基数恒可比较大小；

23° **端点定理**（选择公理的**几何形式**）：实线性赋范空间的（连续）对偶空间（即共轭空间或伴随空间）的单位球有一端点；

24° **消去广群存在定理**（选择公理的**代数形式**）：在每个非空集合上恒存在一个消去广群。

后面十个命题的等价性是近十几年来的新成果。此外，Truss（1973）还用基数与序数来陈述一些推出选择公理的命题，但由于陈述较长故从略（参看汇总后附文献[88]）。

至于定理1中的命题在数学上的应用就更不胜枚举了。兹略举其最重要者如下（即由1°—4°之一可证如下一些定理）：

序化定理：任意集合恒可排成一个序集（此显然弱于整序定理）；

序的扩张定理：每个集合的“部分序”恒可扩张为“序”；

Stone 表示定理：Boole 代数恒同构于集合代数；

超漏斗定理：集合 S 上的每个漏斗恒可扩张为一

个超漏斗；

Nielsen—Schreier 定理：自由群之子群恒为自由群（先由 Nielsen 对有限生成情况证明，后由 Schreier 推广到一般）；

Urysohn 引理：对正规空间S的任二不交闭集A，B恒有定义在S上而值在$[0, 1]$中的连续函数存在，它在A上恒取值0而在B上则恒取值1；

Hahn—Banach扩张定理：设f为实向量空间V上的一个**次线性函数**，φ为子空间S上的线性函数，且在S上有$\varphi(x) \leqslant f(x)$。则在$V$上必存在$\varphi$的线性扩张$\psi$使$\psi(x) \leqslant f(x)$对每个$x \varepsilon V$成立（此为线性泛函中的保范扩张定理的推广）。

次线性函数f就是具有性质：

（i） $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$；

（ii） $f(ax)=af(x)$，其中 $a \geqslant 0$，

的函数；

一致性定理：对集合S上的每个二元会合M必存在S上的函数与M一致（二元会合即 Binary mess）；

质理想定理：Boole 代数恒含（极大）质理想（此真弱于命题13°）。

其它再如：**基底存在与同浓定理，极大理想存在定理，根理想存在定理，代数封化域的唯一存在定理，域的序化定理，可分度量空间之子空间可分**，等等定理的证明都曾经是和定理1中的命题分不开的。虽然

在本世纪三十年代前有部分数学工作者(如Kronecker, Borel, Brouwer 等)曾不甚赞同选择公理，但自 Gödel 的工作出来后（参看§11），不仅大力推动了这方面的研究工作，而且在数学上就大量使用定理 1 中的这些工具了。

基本 Cohen 模型出来后，由实数集之不可整序而导致选择公理在集合论中是不能证明的；再由序化定理之得证而知选择公理独立于序化定理。**第二 Cohen 模型**出来后，又知**两元集之可数类的选择公理**也是在集合论中不能证明的（参看§11）。

§9. 应用举例（一）

本节的内容主要是希望能服务于基础课程的教学，尽量不涉及基础课以上的较高深的数学知识。但这样一来，可举的例子就不是很多的，因此特盼望读者能多帮助，使本节的内容能逐渐丰富起来。

例 1．所有实数的集合 R 必同浓于连续统 $(0, 1]$。

令 M 为所有整数作成的序集，则从序型来看便有

$$\overline{R} = \overline{(0,\ 1]}\ \overline{M},$$

取基数即得

$$\overline{\overline{R}} = cd = c.$$

例 2．作为点的集合来说，n 维空间 R_n 的基数仍为 c，即 R_n 同浓于 R_1。

由例 1 及 Hessenberg 定理即得

$$c^n = c \text{ 或 } R_n \equiv R_1.$$

例 3．可数无穷维空间也同浓于 R_1。

这只要计算一下：

$$c^d = (2^d)^d = 2^{d^2} = 2^d = c,$$

立即可知。

例 4．Vitali 不可测集合的构造。

在闭区间 $[0, 1]$ 中定义一个关系“$\sim$”：当 $x - y$

为有理数时，定义 $x \sim y$. 这显然是一个等价关系，从而得到 [0，1] 的一个分类：

$$[0,\ 1]=\sum_{\nu} A_{\nu},$$

这里 Σ 表示对互不相交的子集取并集的意思。由**选择公理**可在每个 A_ν 中各取定一点 a_ν，令

$$M=\sum_{\nu}\{a_\nu\},$$

则 M 为一不可测集合。

首先对任一实数 a 和实数集 R 的任一非空子集 X 定义

$$a+X=X+a=\{a+x:\ x \varepsilon X\}.$$

然后再把上述等价关系用到 R 中，又得到 R 的一个分类：

$$R=\sum_{\nu} A_{\nu}^{*},\quad A^{*}_{\nu}=\{a_\nu+R_o\}\supset A_\nu,$$

其中 R_o 表有理数集。于是有

$$R=\sum_{\nu} A_{\nu}^{*}=\sum_{\nu}\{a_\nu+R_o\}=\sum_{r\varepsilon R_o}\{M+r\}.$$

假若 M 可测，则每个 $\{M+r\}$ 亦可测且与 M 有相同测度，故由上式知 M 的测度必不为 0，这是因为 R_0 是可数的。现在再看

$$[0,\ 2]\supset\sum_{0\leq r\leq 1}\{M+r\},$$

其中 r 表有理数。但此时右边的测度为 ∞ 而左边的测度为 2，此为矛盾。故 M 不可测。

例 5. 在测度论中，测度完满化的问题的提出是以下列命题的成立为前提的：

命题． R_1 中存在着 Lebesgue 集合它不是 Borel 集合．

设 R_1 中所有 Lebesgue 集合作成之类为 L，所有 Borel 集合作成之类为 B，将证 $\overline{\overline{L}}>\overline{\overline{B}}$．这样一来，不仅证明了上述命题，而这比只举一个反例更为有力，并且此证明反而比举反例容易得多，这就体现了超穷数与超穷论法的优越性．

考虑一个区间 $[a, b)$．用两串上升的有理数序列分别去无限趋近于两端：

$$\{a_n\}\to a, \quad \{b_m\}\to b,$$

使得

$$[a, b)=\bigcap_n [a_n, b)=\bigcap_n \bigcup_m [a_n, b_m).$$

这些区间 $[a_n, b_m)$ 及其余集所作成的类Σ的基数是 $2d^2=d$．每个 Borel 集合都可用 Σ 中的元素经可数次集合运算而得出，故易知有

$$\overline{\overline{B}}\leqslant 2^d\cdot d^d=c^2=c.$$

另一方面，看所有这样的区间 $[a, b_\nu]$，其中 b_ν 由某个 b 连续地变为$b+1$，这些区间作成的类的基数是 c，故又有 $\overline{\overline{B}}\geqslant c$．因而得

$$\overline{\overline{B}}=c.$$

现在再来看 Cantor 集合（测度为 0 的完备集），其基数为 c，从而其幂集合的基数为 2^c，故有 $\overline{\overline{L}}\geqslant 2^c$．但 R_1 的幂集合的基数也是 2^c，因此又有 $\overline{\overline{L}}\leqslant 2^c$．最后便得

$$\overline{\overline{L}} = 2^c > c = \overline{\overline{B}}.$$

例 6. 任意向量空间 V 恒有基底.

考虑 V 中向量作成的一切线性无关组：A_ν，B_τ，…，于是类

$$S = \{A_\nu, B_\tau, \cdots\}$$

显然具有限特征，故由 **Tukey 引理** 知 S 有极大元素，此极大元素就是 V 的一个基底.

这个证明是多么简短而有力！对此命题的证明，用 Tukey 引理是最好不过的.

现在我们取例 6 的一个重要特殊情况来看. 把全部实数作成的加法群 R 看作有理数域 R_0 上的向量空间时，其基底

$$H = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_\rho, \cdots\}$$

特称为 **Hamel 底.** 易知用一个非 0 实数 ξ 去遍乘 H 中每一数后，所得之数集仍为一个 Hamel 底，故不妨设上面 H 中的 $\xi_0 = 1$（用 ξ_0^{-1} 遍乘即可）. 即不妨设

$$H = \{1, \xi_1, \cdots, \xi_\rho, \cdots\}.$$

今用 H 来构造：

例 7. R 上存在一个实函数 $f(x)$ 具性质：

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$；

(ii) f 在 R 上处处不连续.

首先由 (i) 易知 $f(x)$ 具性质：

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)，对一切有理数\frac{n}{m}成立.$$

假若 $f(x)$ 是连续函数，则 $f(x)$ 就成为简单性仅次于常数的所谓齐线性函数

$$f(x)=f(1)x$$

了。现在来研究如何定义 $f(x)$ 使它处处不连续。

如果 $f(1)=0$，则对有理数 a 恒有 $f(a)=0$，故至少对某无理数（例如$\sqrt{2}$）有 $f(\sqrt{2})\neq 0$，于是任何无理数 β 均应有

$$f(\beta+\sqrt{2})-f(\beta)=f(\sqrt{2}).$$

这样就很难用一个统一原则来定义 $f(\beta)$ 的值使（i）成立。

故为简明起见，不妨设 $f(1)=1$，于是对一切有理数 a 有 $f(a)=a$。这时不可能对所有无理点 β 均定义 $f(\beta)=0$，因为有

$$f(1-\beta)+f(\beta)=f(1)=1$$

的原故。假若对某 β 定义

$$f(\beta)=\delta\neq 0,\quad 且\quad \delta\neq\beta,$$

则仿上知很难有一个统一原则来定义函数在其它无理点的值。

总之，在 R 上满足（i）的处处不连续函数是很难定义的。但应用 Hamel 底就很容易做到。因为对每个实数 β，由 β 可唯一地表为

$$\beta=a+a_1\xi_{\nu_1}+\cdots a_n\xi_{\nu_n},$$

就定义 $f(\beta)=a$，则 $f(x)$ 必满足（i）与（ii）。显然易知 $f(x)$ 满足（i）。今证 $f(x)$ 在任意取定的一点 β

处不连续。不妨设 β 如上。在 H 中任取一个异于

$$\xi_{\nu_1}, \ \cdots, \ \xi_{\nu_n}$$

的 ξ，用一串有理数去逼近 ξ^{-1}，即设 $\{a_n\}$ 为一串有理数而 $a_n \to \xi^{-1}$，于是

$$(1-a_n\xi)\to 0 \text{ 或 } (\beta+1-a_n\xi)\to\beta,$$

但由定义知

$$f(\beta)=a, \ f(\beta+1-a_n\xi)=a+1.$$

即有$(\beta+1-a_n\xi)\to\beta$而$f(\beta+1-a_n\xi)\not\to f(\beta)$，$f(x)$在点 β 处不连续。

在数学分析中有 Riemann 例子：如果

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 或 } x \text{ 为无理数时；}\\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \pm\dfrac{p}{q}\text{时}(p, q \text{ 互质}),\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 在无理点及 0 点连续，在非 0 有理点间断。即 $\varphi(x)$ 有可数个间断点。本例则说明 $f(x)$ 不仅为 R 上具不可数个间断点的函数，而且在 R 上是处处不连续的（事实上，对每点 β 及 β 的一个多么小的邻域（区间）内，函数值可以取遍一切有理数，可以想见其不连续的情况是如何厉害）。因此，本例可作为数学分析中一个有代表性的重要例子来看待。

再结合下面两例，我们便可看出 Hamel 底在分析中是有其重要作用的。

例 8．利用 Hamel 底来构造不可测集。

根据上例可定义 R 中的点集

$$M_a=\{x:\ f(x)=a\},\ a\varepsilon R。$$

则诸M_a均为不可测集。

假若不然，不妨设M_0为可测集，其测度为$\mu(M_0)$。按定义易知$M_a=M_0+a$，于是诸M_a均可测，且其测度均等于$\mu(M_0)$。我们仍用"Σ"表不交集合取并集之意。首先由

$$R=\sum_{a\varepsilon R_0}M_a$$

知$\mu(M_0)$必不为0。其次，又将证明$\mu(M_0)$必为0如下：

第一步先证下列等式成立：

$$A_0\cap M_{\frac{1}{n}+i}=(A_{-i}\cap M_{\frac{1}{n}})+i,\ i\varepsilon I,$$

其中$A_i=[i,\ i+1)$为半开区间，I为整数集。

因为

$$x\varepsilon(A_0\cap M_{\frac{1}{n}+i})\Longleftrightarrow x\varepsilon[0,1)\text{及}f(x)=\frac{1}{n}+i$$

$$\Longleftrightarrow 0\leqslant x<1\ \text{及}\ f(x-i)=\frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow -i\leqslant(x-i)<(-i+1)\text{及}$$

$$(x-i)\ \varepsilon M_{\frac{1}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow(x-i)\varepsilon(A_{-i}\cap M_{\frac{1}{n}})$$

$$\Longleftrightarrow x\varepsilon(A_{-i}\cap M_{\frac{1}{n}})+i,$$

故上式成立。且由诸$M_{\frac{1}{n}}$及A_i之可测性知有

$$\mu(A_\circ \cap M_{\frac{1}{n}+i}) = \mu(A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}).$$

于是第二步由

$$R \supset \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} M_{\frac{1}{n}+i},$$

知有

$$A_\circ = (A_\circ \cap R) \supset \{A_\circ \cap (\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} M_{\frac{1}{n}+i})\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} (A_\circ \cap M_{\frac{1}{n}+i}),$$

故又有

$$1 = \mu(A_\circ) \geqslant \mu\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} (A_\circ \cap M_{\frac{1}{n}+i})\right\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} \mu(A_\circ \cap M_{\frac{1}{n}+i}) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \varepsilon I} \mu(A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \mu\{(\sum_{i \varepsilon I} A_{-i}) \cap M_{\frac{1}{n}}\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \mu\{R \cap M_{\frac{1}{n}}\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \mu(M_{\frac{1}{n}}) =$$

$$= \mu(M_\circ) + \mu(M_\circ) + \cdots,$$

所以 $\mu(M_\circ)$ 又必为 0。此为矛盾。

例 9．在 [0, 1] 内造一个不可测集使其内测度为 0，外测度为 1。

由上面例的证明中可知

$$M_\circ = \sum_{i \in I} (M_\circ \cap A_i),$$

故右边至少有一个为不可测集。设 $N_j = M_\circ \cap A_j$ 为不可测集，于是下面的 M 为不可测集：

$$M = \{N_j - j\},\ M \subset [0,\ 1],$$

而且 M 中之点 x 相应之函数值 $f(x) = -j$。于是由 M 之不可测性（从而不可数）及其点相应之函数值恒为 $-j$ 以及 $f(x)$ 之性质易知 M 之内测度为 0，外测度为 1。

本例通过内、外测度之不同，给出对不可测集（从而也对可测集）的一个比较直观的描述。当初 Lebesgue 就是用内测度等于外测度来定义可测性的。

例10。定义函数 $f(x)$ 在一点 x 是连续的，这有下面两种定义法：

（i）$\varepsilon - \delta$ 定义法；

（ii）如果 $\lim x_n = x$，则 $\lim f(x_n) = f(x)$。

这两种定义的等价性是和**可数选择公理**（即当类 F 可数时）密切相关的。

事实上，（i）⇒（ii）是显然的。看（ii）⇒（i）。假若（i）不成立，则有 $\varepsilon > 0$ 使对每个 n，可由**可数选择公理**在 x 的 $\frac{1}{n}$ 邻域内取 x_n 使

$$|f(x_n)-f(x)|\geqslant\varepsilon.$$

因之，(ii) 不成立。

例11. 通常说一个集合是有限的，如其基数为一自然数。又说一个集合是 **Dedekind 有限**的，如它不能同浓于其真子集。

如果不假定**选择公理**，则 Dedekind 有限与普通的有限不能等价。但由选择公理并通过下列命题便能证明此二者是等价的。

命题：集合 S 是 Dedekind 有限的，必要而只要 S 不含可数子集。

证明。如果 S 含可数子集，则 S 显然不能是 Dedekind 有限的。反过来，如果 S 不是 Dedekind 有限的，则有 S 到其真子集 S_1 上的一一映射 f 存在。令 $a\varepsilon S$ 而 $a \,\overline{\varepsilon}\, S_1$，则

$$a,\ f(a),\ f(f(a)),\ \cdots$$

就作成 S 的一个可数子集。证毕。

现在来证明普通的有限等价于 Dedekind 有限。显然有限集恒为 Dedekind 有限的。反之，设 S 是 Dedekind 有限的集合。假若 S 是无穷集合，则 S 的全部子集，除去空集外，所作成的类 F 上就有一个**选择函数** f 存在。于是

$$a_1=f(S),\ a_2=f(S-\{a_1\}),\ a_3=f(S-\{a_1,a_2\}),\cdots$$

就是 S 的一个可数子集。此与上命题矛盾。故 S 必为

有限集合。等价性得证。

例12. 证明测度扩张定理.

设X为一空间（即一非空集合），F是X的某些子集作成的一个类. 如果F满足条件

（i）$X \varepsilon F$;

（ii）当$A \varepsilon F$时，A在X中的余集A^*也εF;

（iii）当A，$B \varepsilon F$时，就有$A \cup B \varepsilon F$,

则F就叫做空间X上的一个域. 如果F再满足

（iv）当A_1，A_2，…（**可数**个）均εF时，就有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \varepsilon F,$$

则F就叫做X上的一个σ—域.

易知条件(iii)为条件(iv)的特款. 因由(i)与(ii)知空集$\phi = X^* \varepsilon F$,故在(iv)中取$\phi = A_3 = A_4 = \cdots$即得(iii). 且由(ii)与(iv)知$X$上$\sigma$—域中的**可数**个元素（即$X$的子集）的交集仍为该$\sigma$-域中的元素；又易验证$X$上的若干个$\sigma$-域的交仍为$X$上的一个$\sigma$-域，由此即知：对$X$上任意一个域$F$，必存在$X$上包含$F$的最小$\sigma$-域，记为$S$（$F$），它又叫做由$F$所生成的$\sigma$-域.

X上的一个域F上的一个函数μ:

$$\mu\ (A)\ \text{为实数},\ A \varepsilon F,$$

如果具有下列性质：

1° 非负性：对任意 $A\varepsilon F$ 恒有 $\mu(A)\geqslant 0$；

2° **可数**可加性：当

$A_i\varepsilon F(i=1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，$\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$

εF

时，就有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),$$

则称 μ 为 F 上的一个测度。

F 上的一个测度 μ，如果恒取有限值，即

$\mu(A)<\infty$，对任何 $A\varepsilon F$，

则叫做一个有限测度；如果对每个 $A\varepsilon F$ 恒存在 F 中一个序列 A_1，A_2，…使

$$A\subset\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right), \text{且 } \mu(A_i)<\infty(i=1,2,\cdots),$$

则说 μ 是 F 上的一个 σ-有限测度。

概率论课程中要用到下面的：

测度扩张定理. 空间X上的一个域F上的一个σ-有限测度 μ 必可唯一地扩张成F所生成的σ-域$S(F)$上的一个 σ-有限测度。

现在就来证明这个定理。首先对空间 X 的任一子集 A，考虑它在 F 中的**可数**覆盖

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\supset A,\ A_i\varepsilon F.$$

定义 $\sum\limits_i\mu(A_i)$ 的下确界为A在 Carathéodory 意义下

的外测度 $m(A)$。于是 m 的非负性与 σ-有限性是显然的。为了证明 m 具可数可加性，要先验证它满足 Carathéodory 可测条件：

$$m(A)=m(TA)+m(T^*A)$$

其中 $T\varepsilon F$，A 为 X 之任意子集，TA 即 $T\cap A$ 之简记。这又只要验证

$$m(TA)+m(T^*A)\leqslant m(A)$$

且不妨设 $m(A)<\infty$。

任予 $\varepsilon>o$，可以找到 A 的一个复盖 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 使

$$m(A)\geqslant\sum_i\mu(A_i)-\varepsilon.$$

不妨设诸 A_i 互不相交。因若不然，则可用

$$B_1=A_1,\ B_2=A_2-A_2A_1,\ B_3=A_3-A_3A_1-A_3A_2,\ \cdots$$

去代替诸 A_i 就行了。于是由

$$A\subset\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right),TA\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(TA_i),T^*A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(T^*A_i)$$

便知

$$m(TA)+m(T^*A)\leqslant\sum_i\{\mu(TA_i)+\mu(T^*A_i)\}=$$
$$=\sum_i\mu(A_i)\leqslant m(A)+\varepsilon$$

再由 ε 之任意性即得

$$m(TA)+m(T^*A)\leqslant m(A).$$

这样一来，就可以和通常实变函数中的讲法一样了。F 中的每个 T 都是 Carathéodory 意义下可测的。由于 X 的一切可测集构成 X 上的一个 σ-域，故 $S(F)$

中之集合均可测，即知 m 具**可数**可加性。于是 m 即为 μ 在 $S(F)$ 上的扩张。至于 m 之唯一性，则可由 σ- 域 $S(F)$ 之极小性而立知。测度扩张定理证毕。

例13. 设 $g(x)$ 为 R 上一实函数，且满足下列二条件：

非降：对任意 $x_1<x_2$ 恒有 $g(x_1)\leqslant g(x_2)$；

左连续：对任意 $a\varepsilon R$ 有

$$\lim_{x\to a-} g(x)=g(a).$$

这样的函数在概率论中是有重要意义的。

今以 $g(x)$ 为基础，在 R 上的一个域

$$F_0=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i):\ a_i<b_i \text{ 任意},\ n=1,2,\cdots\right\}$$

上定义函数 μ_g 如下：对任意 $A\varepsilon F_0$，如果

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i)$$

且此为 A 表为最少可能的互不相交的半开区间的并集的形式，则令

$$\mu_g\ (A)=\sum_{i=1}^{n}\Big(g(b_i)-g(a_i)\Big) \qquad (1)$$

并当 $a_i=-\infty$ 或 $b_i=\infty$ 时即了解为

$$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}g\ (x),\qquad g\ (\infty)=\lim_{x\to\infty}\ g(x)$$

即由（1）定义的 μ_g 可能取 ∞ 值。仿上例的办法可以证明

定理. 由（1）定义的 μ_g 是 F_0 上的一个 σ-有限测度。

因为例12中的测度扩张定理与本例中的这个定理分别是我系1975年编的概率论讲义中87页与93页的两个证明从略的定理，故就把它们作为应用举例而简单地介绍如上。

例14. 证明向量空间的相补定理（§8 命题19°）。

由例6知向量空间 V 的子空间 S 有基底 B。考虑 V 中含 B 的所有线性无关组所作成的类 F，它在集合的包含关系下就是一个部分序类。今在 F 中任取一个单线子集（即单线子类）：

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_\sigma \subset \cdots$$

并令 C 为所有这些 B_σ 的并集，则 C 显然是 V 中含 B 的一个线性无关组，从而为此单线子类的一个上界。由 **Zorn 引理**知 F 中有极大元素 D，令 $D-B$ 生成的子空间为 S'，则便有 $V=S\dotplus S'$。

[**附注**]. 向量空间的相补定理可以推出**多个选取公理。**

设一些集合 X_i $(i\varepsilon I)$ 作成之类为 F，其中足指数集 I 是任意集合，不一定是整数集。不妨设诸 X_i 是彼此之间没有公共元素的集合（自然设为非空集合）。令 $R[X_i]$ 为实数域 R 上的一个向量空间，X_i 为它的一个基底，即 $R[X_i]$ 为所有一次齐次式

$$a_1x_{i1}+a_2x_{i2}+\cdots+a_mx_{im}$$

作成的向量空间。其中 m 为任意自然数，而

$$a_1,a_2,\cdots,a_m\varepsilon R;\ \ x_{i1},x_{i2},\cdots,\ x_{im}\varepsilon X_i.$$

令 S_i 为 $R[X_i]$ 中所有这样的向量

$$a_1x_{i1}+a_2x_{i2}+\cdots+a_nx_{in}\quad(a_1+a_2+\cdots+a_n=o)$$

作成的子集。显然 S_i 为 $R[X_i]$ 的一个子空间。再令 V 为所有 $R[X_i]$ 的直接和，$i\varepsilon I$。即V为一切有限和

$$w_1+w_2+\cdots+w_s\quad(w_i\varepsilon R[X_i],\ i=1,2,\cdots,s)$$

作成的（R 上的）向量空间。又令 S 为所有 S_i 的直接和，$i\varepsilon I$。于是 S 为V 的一个子空间，从而有相补子空间 S' 使 $V=S\dotplus S'$。

今在一个固定的 X_i 中任取二元素 x，y 来看，它们在V 中可分别唯一地表为：

$$x=u_1+u_1',\ y=u_2+u_2'\ (u_1,\ u_2\varepsilon S;\ u_1',u_2'\ \varepsilon\ S').$$

再看

$$x-y=(u_1-u_2)+(u_1'-u_2')\tag{2}$$

由于 $x-y$ 的系数满足$1+(-1)=0$，故 $x-y\varepsilon S_i$，从而 $x-y\ \varepsilon\ S$。于是再由 $u_1-u_2\varepsilon S$，$u_1'-u_2'\varepsilon S'$ 即由(2) 知

$$u_1'-u_2'\ \varepsilon\ S\cap S'=\{0\},$$

即知必有$u_1'=u_2'$。可见对这个固定的X_i 的任何元素 x，在V 中只有唯一的$u'\ \varepsilon\ S'$ 使

$$x=u_x+u',\ (u_x\ \varepsilon\ S)\tag{3}$$

（当 x，$y\ \varepsilon\ X_i$ 是上面已唯一表出时，则应有$u_1=u_x$，$u_2=u_y$，$u_1'=u_2'=u'$）。所以由(3)可知：对 X_i 就只

有一个 $u' \varepsilon S'$ 与它相应。再由 (3) 移项得

$$u' = x - u_x, \quad x \varepsilon X_i, \ u_x \varepsilon S.$$

于是由 S 及诸 $S_i(i \varepsilon I)$之定义知：u' 的线性表示式中至少出现一个 $y \varepsilon X_i$ 它的系数非 0。故 u' 的线性表示式中，所有那些 $y, \cdots, z \varepsilon X_i$ 其系非 0 者就组成X_i 的一个有限子集（因每个线性表示式都只有有限项），记此有限子集为 N_i，则 N_i 是由 u'，从而是由 X_i，所唯一确定的。定义

$$f(X_i) = N_i, \ i \varepsilon I,$$

就得到类 F 上的一个多个选取函数 f。故由向量空间的相补定理可推出多个选取公理（可参看 Bleicher (1964)，即又附文献〔2〕）。

例15. 最后举一个这样的例子，从表面上看似乎要用选择公理，但实际上并**不用选择公理**，这就是 Heine-Borel 有限覆盖定理及其证明。当定理陈述到"如果每一点 z 都是一个圆 K_z 的中心"时，不注意看，就可能认为用了选择公理，在所有以 z 为中心的圆中选了一个。其实并没有用选择公理，因为这仅是假设条件，不存在那样的覆盖就算了。要在存在的前提下，才证明存在有限覆盖。至于定理的证明，则是用二分法与区间套定理等，均与选择公理无关。

§10. 应用举例（二）

本节的内容将不受过去基础课的限制。

已如 §8 及本书序言中所述，**超穷数**（即超穷基数与超穷序数以及它们在近代发展中的推广概念（如广义序数）的总称）与**超穷论法**（如超穷归纳法，超穷归纳法定义原理，选择公理，质理想定理，以及与它们密切相关的一些公理、原理、引理、定理等等），在近代数学中的应用是非常广泛的，早已成为近代数学理论中的重要而有力的工具。比起在基础课程中的应用就多得多了。但由于篇幅所限，故只能在应用最多的几个数学分支中，如抽象代数、泛函分析、拓扑学等，各举一典型例子来说明其应用，及其在论证中所起的关键作用，或简化论述的显著作用。但为了容易引起读者的兴趣，却先来看**“分球奇论”**，即来看两个非常有趣的定理。首先陈述此二定理如下：

Hausdorff 分球面定理. 任意球面 S 可分为不交子集之并：

$$S=A\cup B\cup C\cup D,$$

使 A, B, C 可以互相叠合，且 $B\cup C$ 又可与 A, B, C 的每一个叠合（似乎是不可能!），而 D 则为 S 上一个

可数点集。

普通空间中两个子集合U，V说是可以**有限分割而叠合**，记为$U \approx V$，如果U与V均能分成同样多个不交子集之并：

$$U=U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n; \qquad V=V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$$

使得U_i与V_i叠合($i=1,2, \cdots, n$)。

Banach-Tarski 分球定理。任意闭球体W可以分为两个不交子集U，V之并，使W与U，V的每一个均能有限分割而叠合。

这在直观上等于说：一个铜球可以重新做成两个与原来一样大的铜球，从而经过n次重新做（n为任意自然数)，就能得到2^n个与原来一样大的铜球。岂不是怪事！然而这两个“怪”定理，在**选择公理**下，可以用近代数学理论严格地证明如下：

引理1．普通空间中，绕一点o的所有转动恰与绝对值为1的所有四元数（把正、负四元数等置之）有一个同构对应（在双方的乘法运算下)。

这个引理在解析几何的基础上来证时，实在太费篇幅了，且此为大家所熟知的结果，故证明从略。

现在取W之球心o为原点而建立直角坐标系。由于绕o之任意转动必为绕过o之某定向直线（以后简称此为轴）之转动（此断言可通过引理“空间绕某轴之转动必为两个线反射的积”来证明)，故若φ为绕o之一转动，则可视φ为绕轴a_φ之转动。现在特别地取

定 φ 为绕 a_φ 转动 π 的转动，ψ 为绕 a_φ 转动$\frac{2}{3}\pi$ 的 转动。于是有 $\varphi^2=1$，$\psi^3=1$。设G 为群$\{1,\varphi\}$与群$\{1,\psi,\psi^2=\psi^{-1}\}$所作的乘积，即 G 为 φ 与 ψ 在绕 o 的转动群中所生成的群。于是有

引理 2。可以这样决定轴 a_φ 与 a_ψ 使 G 之不同元素表示不同转动。

证明。取 a_ψ 与 X- 轴重合，于是其方向余弦为 $(1,0,0)$。再取 a_φ 为由 a_ψ 在 X, Y 平面上绕 o 转一个待定的角 θ 而成的轴，则 a_φ 之方向余弦为 $(\cos\theta,\sin\theta,0)$。此外，引理 1 中的具体对应规则是这样的：当转动 φ_τ 等于绕 a_{φ_τ} 转动角 τ 而 a_{φ_τ} 之方向余弦为 (l,m,n)时，则有

$$\varphi_\tau \xleftrightarrow{\text{同构对应}} \cos\frac{\tau}{2}+\left(l\sin\frac{\tau}{2}\right)i+\left(m\sin\frac{\tau}{2}\right)j+$$
$$\left(n\sin\frac{\tau}{2}\right)k.$$

故由$\varphi=\varphi_\pi$，$\psi=\varphi_{\frac{2}{3}\pi}$及 a_φ 与 a_ψ 之方向余弦分别如上再添上 $\psi^{-1}=\psi^2=\varphi_{\frac{4}{3}\pi}$与 $a_{\psi^{-1}}=a_{\psi^2}=a_\psi$

便知有

$$\varphi\longleftrightarrow\cos\frac{\pi}{2}+\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}\right)i+\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\right)j+ok$$
$$=(\cos\theta)i+(\sin\theta)j;$$

$$\psi\longleftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)i;\quad \psi^{-1}\longleftrightarrow\cos\frac{2}{3}\pi+$$

$(\sin\frac{2}{3}\pi)i$.

因 G 之一般元素 g 恒可表为（自然不能把 $\varphi\varphi, \psi\psi^{-1}$ 等随便添进去）：

$$g = \cdots\varphi\cdots\psi\cdots\psi^{-1}\cdots \tag{1}$$

其中可以只出现 φ, ψ, ψ^{-1} 三者之一或二。

故若设 g 对应四元数 $a+bi+cj+dk$，则 a, b, c, d 都是 $\cos\theta$，$\sin\theta, \cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}$，$\cos\frac{2}{3}\pi$，$\sin\frac{2}{3}\pi$ 的整系数多项式，故 θ 只能有可数个值使得

$$a=1,\quad b=c=d=0.$$

所以，除去这可数个值外，θ 任取另外一值（还可要求此值 $<\frac{\pi}{2}$）时，按此 θ 与上面办法所决定的 a_φ 与 a_ψ 即满足引理之要求。证毕。

引理 3. 群 G 可分为不交子集之并：

$$G = A^* \cup B^* \cup C^*,$$

使 $A^*\varphi = B^* \cup C^*$，$A^*\psi = B^*$，$A^*\psi^{-1} = C^*$。

证明。先令 $A_0^* = \{1\}$，$B_0^* = \{\varphi, \psi\}$，$C_0^* = \{\psi^{-1}\}$，则此为三个不交的子集，分别含 1 个，2 个，1 个元素。现在按照下面的原则来逐渐扩大这三个子集，使之成为满足引理中要求的不交子集 A^*, B^*, C^*：

为了便于陈述起见，分别把扩大过程中的子集按上述次序叫做第一个，第二个，第三个（因为是循环扩大法，故不好用符号来明确表示）。

（i）当第一个所含的元素 g 表为（1）时，如果其最末一个因子是 ψ 或 ψ^{-1}，则把 $g\varphi$ 添到第二个中去；如其最末因子是 φ，则把 $g\psi$ 添到第二个中去，把 $g\psi^{-1}$ 添到第三个中去。

（ii）当第二个所含的元素 g 表为（1）时，如其最末因子为 ψ 或 ψ^{-1}，则把 $g\varphi$ 添到第一个中去；如其最末因子为 φ，则把 $g\psi^{-1}$ 添到第一个中去，把 $g\psi$ 添到第三个中去。

（iii）当第三个所含的元素 g 表为（1）时，如其最末因子为 ψ 或 ψ^{-1}，则把 $g\varphi$ 添到第一个中去；如其最末因子为 φ，则把 $g\psi$ 添到第一个中去，把 $g\psi^{-1}$ 添到第二个中去。

如此循环地添下去，由于 G 可数，故最后必能把 G 的元素分光，而由引理 2 得三个不交子集 A^*, B^*, C^*（分别是第一、第二、第三个扩大的），且由上述三点添加的原则即知 A^*, B^*, C^* 满足引理中的要求，而如所欲者。证毕。

下面就先来证明**分球面定理**。即分 W 的球面 S。

令 D 为 $g \varepsilon G$ 在 S 上的所有不动点作成的子集。由于每个 g 在 S 上只有两个不动点，而 G 又可数，故 D 为可数点集。S 上剩下的点集 $S-D$ 可以分成下面这些不交（因 G 为群故也）子集 S_x 之并：

$$S_x = \{x^g,\ g \varepsilon G\},\quad x \varepsilon S-D.$$

由选择公理，可在每个 S_x 中取一点而作成点集 S_0。然

后令

$$A=\{a: a=x^g, \ x\varepsilon S_0, \ g\varepsilon A^*\};$$

$$B=\{b: b=x^g, \ x\varepsilon S_0, \ g\varepsilon B^*\};$$

$$C=\{c: c=x^g, \ x\varepsilon S_0, \ g\varepsilon C^*\}.$$

则由引理3即知 A，B，C 满足定理中的要求，而 $S=A\cup B\cup C\cup D$。分球面定理证毕。

此证明类似于 Vitali 不可测集的作法，故此结果出来后，加重了部分数学工作者对 Vitali 例子的不满意，当然根子还是选择公理。

引理4．点集之间的“有限分割而叠合”的关系“$\approx$”是一个**等价关系．**

引理5．如果 A，B 都是不交子集之并集：

$$A=A_1\cup A_2, \ B=B_1\cup B_2,$$

且 $A_1\approx B_1$，$A_2\approx B_2$，则 $A\approx B$。

以上二引理之证明均甚显然。

引理6．如果 $A_1\subset B\subset A$ 而 $A_1\approx A$，则必有 $B\approx A$。

证明．由假设知有

$A=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$， $A_1=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$

使 C_i 叠合于 D_i $(i=1, 2, \cdots, n)$。取定叠合映射 f_i

$$C_i\xrightarrow{f_i}D_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

再把诸 f_i 汇总起来即得到 A 到 A_1 上的一个一一映射 f。令

$$A_o = A,\ A_1 = gA_o,\ A_2 = gA_1,\ \cdots;$$
$$B_o = B,\ B_1 = gB_o,\ B_2 = gB_1, \cdots.$$

此处 $gX = \{f(x):\ x \varepsilon X\}$. 再令

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n),$$

则 gC 与 $A - C$ 不相交且由 $A \approx A_1$ 及 f 与 gC 之定义而知 $C \approx gC$. 故

$$A = C \cup (A - C),\ B = gC \cup (A - C),$$

即由引理 5 得 $A \approx B$. 证毕.

下面就接着来证**分球定理.**

首先由分球面定理把球 W 的球面 S 分割成

$$S = A \cup B \cup C \cup D.$$

再对 S 的任意子集 Y 定义 W 的子集 Y^{**} 如下:

$$Y^{**} = \{y: y \neq 0\ (\text{球心}), \text{射线}\ oy\ \text{与}\ S\ \text{之交点}\ \varepsilon Y\}.$$

于是显然有

$$W = A^{**} \cup B^{**} \cup C^{**} \cup D^{**} \cup \{0\},$$

而且有

$$A^{**} \approx B^{**} \approx C^{**} \approx (B^{**} \cup C^{**}) \qquad (2)$$

现在令

$$U = A^{**} \cup D^{**} \cup \{0\},\ V = W - U,$$

则由(2)及引理 4、5 得

$$A^{**} \approx B^{**} \cup C^{**} \approx A^{**} \cup (B^{**} \cup C^{**})$$
$$= A^{**} \cup B^{**} \cup C^{**},$$

故 $U \approx W$. 再设 h 为绕 o 之一转动, 定义

$$D^h = \{d^h : d \varepsilon D\},$$

则由 D 与 D^h 之可数性知：最多只有可数个绕 o 之转动使 D 经转动后仍与 D 相交。再由 G 之可数性及绕 o 之转动的个数是不可数的，即知有 $h \not\varepsilon G$ 使 D 与 D^h 不交。于是仿上先得出

$$C^{**} \approx A^{**} \cup B^{**} \cup C^{**}$$

后，再使用一下 h，即知，

$$D^h \subset A \cup B \cup C,$$

从而D^{**}便可与 $A^{**} \cup B^{**} \cup C^{**}$的一个子集叠合，所以必有 C 的子集 $C_1{}^{**} \approx D^{**}$。现在令

$$c \varepsilon C^{**} - C_1{}^{**},$$

则有

$$A^{**} \cup D^{**} \cup \{o\} \approx B^{**} \cup C_1{}^{**} \cup \{c\} \subset V \subset W,$$

故由 $U \approx W$ 及引理 6 即得 $W \approx V$。证毕。

通过分球奇论，可能使人产生这样想法：选择公理多半是不合理的。所以下面我们就从反面来看。如果没有选择公理，同样会出现“怪”定理。§8 末所述的基本 Cohen 模型就不满足选择公理。由此模型可知：有实数作成的一个无穷集合 D，它是 Dedekind 有限的。由此便可证出下面的“怪”定理。

定理。存在一个定义在整个直线上的实函数 $f(x)$ 及一点 a，按 ε-δ 定义来看，$f(x)$ 在点 a 是不连续的；但另一方面，只要有序列 $\{a_n\}$ 使 $a = \lim a_n$ 就必有 $f(a) = \lim f(a_n)$。

这在通常的理解下等于说：$f(x)$ 在点 a 又连续又不连续。岂不更怪吗！

为了证明定理，先证

引理．D 必有一个聚点．

证明．假若 D 无聚点，则 D 中每个点 d 均为孤立点．现在考虑直线上所有这样的开区间 (a, b)，其中 a 与 b 均为有理数．由有理数集之可数性知这些区间可排为

$$I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots.$$

因为 D 中每点 d 均为孤立点，故对每个 $d \varepsilon D$，这串区间中必恰好存在一个只含 D 中这点 d 而不含 D 中其它点且其足指数又最小．这样一来，D 就成为可数集，与§9 例 11 中的命题矛盾．证毕．

现在来证明定理．由引理知 D 有一个聚点 a．今定义 $f(x)$ 如下：

当 $x \varepsilon D-\{a\}$ 时，$f(x)=1$；对其它的 x 就一律定义 $f(x)=0$．

于是由定义知 $f(a)=0$．由于 a 是 D 的一个聚点，故 a 的任何 ε 开区间必含有 $D-\{a\}$ 之点，函数 $f(x)$ 在该点之值为 1，所以 $f(x)$ 在点 a，按 ε-δ 定义来说，是不连续的．

如果有序列 $\{a_n\}$ 使 $a=\lim a_n$，则诸 a_n 中最多只有有限个在 $D-\{a\}$ 中，这是因为 D，从而 $D-\{a\}$ 是 Dedekind 有限的，必不含可数子集的缘故．于是除去

这有限个点外，$f(x)$ 在其余可数个点上的函数值均为0，即有

$$f(a)=0=\lim f(a_n).$$

证毕。

由此可见，没有选择公理比有选择公理还“更为不妙”，因为在数学分析中的基本而重要的“连续性”概念上都要出“怪”事，何况于其它。不仅如此，而且在不满足选择公理的各种模型里，还可以分别证出许多“怪”定理如下：

1° 有理数域上存在着没有基底的向量空间（从基底的不同概念来说，这当然与可分 Banach 空间的基底问题的反例是两回事）；

2° 任意实数集恒 Lebesgue 可测；

3° “Urysohn 引理”这个命题不成立；

4° 一向量空间可以有两个不同浓的基底；

5° Vitali 不可测集与 Hamel 底均不存在；

6° 所有实数的集合是可数个可数子集的并集；

7° 实直线（作为度量空间）有一个子空间是不可分的；且有一个无界的非闭子集，在其中每个序列恒含一收敛子序列；

8° 存在一个含非自由子群的自由群；

9° 存在一个没有代数封化扩张的域，

等等。以上诸“怪”定理的证明可参看下列文献：

Feferman and Levy (1963)，即后又附文献 [1]；

Solovay(1970)，即文献[70]；

Pincus (1972)，即文献 [74]；

Pincus and Prikry (1975)，即又附文献[64]；

Jaegermann(1965), Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. (13), P. 699；

Solovay (1965), Notices Am. Math. soc(12), P. 217；

Jech and Sochor (1966), Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math.(14), p. 351；

Jech (1968), Časopis Pěst. Math.(93), p. 30；

Läuchli(1963), Comment. Math. Helv.(37), p.1.

现在回到本节的主要内容中来.

为了用超穷论法来证明拓扑学中著名的 (§8 命题 8°) **Tychonoff 定理**，并采用过去的 Bourbaki 的办法，就是用所谓"漏斗"来搞，乃先有下面的

定义．设S为一集合，$\widetilde{F}$为S的幂集合U_S的一个非空真子集．如果$\widetilde{F}$满足条件：

1°如果 $X \varepsilon \widetilde{F}$ 而$X \subset Y$，则$Y \varepsilon \widetilde{F}$；

2° 如果X，$Y \varepsilon \widetilde{F}$，则$X \cap Y \varepsilon \widetilde{F}$，

则说$\widetilde{F}$是 S 上的一个**漏斗**．如果$\widetilde{F}$再满足条件：

3° 对每个$X \subset S$，或$X \varepsilon \widetilde{F}$或$X$ 的余集 $(S-X) \varepsilon \widetilde{F}$，

则说$\widetilde{F}$是 S 上的一个**超漏斗**．

US 的一个非空真子集$\widetilde{B}$叫做S上的一个**漏斗基**，

如果所有这样的X：

$$X \supset X_1 \cap \cdots \cap X_n,\ 其中 X_i \varepsilon \widetilde{B} (i = 1, 2, \cdots, n),$$

n 为任意自然数，作成 S 上的一个漏斗。

在 *Boole* 代数中，漏斗与超漏斗的概念分别与**理想**与**质理想**(即**极大理想**)的概念是**对偶**的。如再通过 *Stone* 表示定理来看此点，就更清楚了。所以在此就顺便把 Stone 表示定理简单地证明如下：

设 B 是一个 Boole 代数。令 Σ 为 B 上所有超漏斗作成的集合。现在定义 B 到 Σ 的幂集合内的一个映射 σ：

$$\sigma(b) = \{U \varepsilon \Sigma;\ b \varepsilon U\}.$$

于是显然有

$$\sigma(b \cup c) = \sigma(b) \cup \sigma(c);\ \sigma(b \cap c) = \sigma(b) \cap \sigma(c);$$

$$\sigma(1) = \Sigma;\ \ \sigma(\overline{b}) = \Sigma - \sigma(b).$$

所以只要再证明

"当 $b \neq c$ 时，$\sigma(b)$ 与 $\sigma(c)$ 为Σ的不同子集"就知 σ 是 B 到 Σ 的幂集合内的一个同构映射，即B同构于一个集合代数。

当 $b \neq c$ 时，不妨设在部分序集B中有 $b \not\geq c$。于是 $b \cup \overline{c} \neq 1$，从而由 Zorn 引理知存在一个含 $b \cup \overline{c}$的质理想 P。再由对偶性及

$$\overline{c} \varepsilon P,\ \ c \not\varepsilon P$$

便知 $B-P$ 是含 c 的一个超漏斗，此超漏斗显然不含b。证毕。

在此再顺便提一下：**非标准分析**中的**非标准实数域**就是以超漏斗概念为基础而构造出来的。

事实上，设 N 为自然数集，R 为实数域。考虑定义在 N 上而值在 R 中的一切（实）函数。在函数的加法和乘法下，所有这些函数作成一个有1的交换环Ω。又考虑 N 上这样的一个漏斗，它是由 N 去掉有限多个元素的诸子集作成的。由超漏斗定理知此漏斗可扩张为N上的一个超漏斗$\widetilde{F}$。再考虑Ω中所有这样的函数，其零点集合属于$\widetilde{F}$者。这些函数作成 Ω 的一个极大理想M（其理想性可由漏斗性推出，极大性则可由$\widetilde{F}$之"超"性推出）。于是

$$R^* = \Omega / M$$

就是一个域，且在同构观点下，易知R^*为R的一个扩张。再通过正、负元素来定义"序"，即知 R^* 为 R（作为序域）的一个保序扩张，也就是所谓**非标准实数域**。

非标准实数域 R^* 中所有的所谓有界元素又作成一个子环 S^*，而所有无穷小元素（包括 o 在内）又作成 S^* 的一个极大理想 I^*，且有

$$R \cong S^* / I^*.$$

为了证明 Tychonoff 定理，还需要先证几个引理。

引理7. 如果拓扑空间 S 上的每个漏斗基 $\widetilde{B}$ 均具性质：

$$\cap \{\overline{X}; \ X \varepsilon \widetilde{B}\} \neq \phi \tag{3}$$

则 S 为紧致的。反之亦然。

证明。设 $\{A_\tau\}$ 为 S 的任意一组闭集且其中有限个之交恒非空。容易验证 $\{A_\tau\}$ 为 S 上一个漏斗基。故由所设条件（3）知

$$\bigcap_\tau A_\tau \neq \phi,$$

从而知 S 为紧致空间。

反之，若 S 为紧致空间，$\widetilde{B}$为 S 上任意一个漏斗基，则$\widetilde{B}$中任意有限个X_i 之交必非空，从而更有

$$\bigcap_i \overline{X}_i \neq \phi.$$

于是由紧致性便知（3）式成立。证毕。

引理 8. 如果诸集合作成的一个非空类 F 具有限特征，则 F 中每个 X 必含于 F 的一个极大元素中。

此引理既为 Tukey 引理之推广，又与 Tukey 引理等价，故为 Tukey 引理本身的精致化。

证明。类 F 中所有包含 X 的集合显然也作成一个部分序类 F_0。看其中任意一个升链（即单线序类）：

$$\cdots \subset Y_i \subset \cdots, \quad X \subset Y_i.$$

令 Y 为诸 Y_i 的并集。Y 的任意有限子集 A必含于某个 Y_i 中，从而有 $A \varepsilon F$， 故 $Y \varepsilon F$。 从而 $Y \varepsilon F_0$。且 Y 即上之升链在 F_0 中的上界。由 Zorn 知 F_0 含极大元素，此即 F 中含 X 的极大元素。证毕。

由于 Zorn 引理与 Tukey 引理是等价的，而引理 8 可由 Zorn 引理推出，且引理 8 显然可推出 Tukey 引理，故引理 8 与 Tukey 引理等价。

引理 9. 集合S上的任意一个极大漏斗基$\widetilde{B}$本身必然就是S上的一个超漏斗.

证明. (i)如果$X \varepsilon \widetilde{B}$, $X \subset Y$, 则把Y添进$\widetilde{B}$中去后, 此扩大的类

$$\widetilde{B} \cup \{Y\}$$

显然仍为S上的一个漏斗基, 故由极大性知

$$\widetilde{B} \cup \{Y\} = \widetilde{B}.$$

即有$Y \varepsilon \widetilde{B}$.

(ii) 如果X, $Y \varepsilon \widetilde{B}$, 则仿上把$X \cap Y$添进$\widetilde{B}$中去后, 由极大性又知,

$$\widetilde{B} \cup \{X \cap Y\} = \widetilde{B},$$

即又得$X \cap Y \varepsilon \widetilde{B}$.

(iii) 如果$Z \not\varepsilon \widetilde{B}$, 则把$Z$添进$\widetilde{B}$中去后, 所得之扩大类必不为一漏斗基, 从而至少有一个$X \varepsilon \widetilde{B}$使$X \cap Z = \phi$. 所以

$$(S - Z) \cap X \neq \phi.$$

又对任意$Y \varepsilon \widetilde{B}$, 由$X \cap Y \neq \phi$及$Z \cap X = \phi$即知$(S - Z) \cap (X \cap Y) \neq \phi$, 故$(S - Z) \cap Y \neq \phi$. 所以$(S - Z)$与$\widetilde{B}$中每个集合相交, 从而仿上把$(S - Z)$添进$\widetilde{B}$中去后又得一漏斗基, 而由极大性知必有$(S - Z) \varepsilon \widetilde{B}$. 证毕

现在来证

Tychonoff 定理. 若干紧致空间S_i的直积

$$S = X\{S_i: i \varepsilon I\},$$

在乘积拓扑下，仍为紧致空间。

证明。设 F 为 S 上所有漏斗基作成的类。任取 F 中一个漏斗基 $\widetilde{B}_r$ 来看，设 S_1，$S_2 \cdots, S_n$ 是 $\widetilde{B}_r$ 中任意 n 个集合，于是必有

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \neq \phi$$

从而 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 就是 S 上一个漏斗基，即知类 F 中任一集合的有限子集恒 εF。反之，设 $\widetilde{B}_0$ 是幂集合 US 的一个非空真子集，其任意有限子集恒为 S 上的漏斗基，则 $\widetilde{B}_0$ 显然就是 S 上一个漏斗基。总之类 F 具有限特征性，故由引理 8（等于用一次**选择公理**）知 S 上任一漏斗基恒含于 S 上一个极大漏斗基 $\widetilde{B}$ 中。所以只要证明：对此 $\widetilde{B}$ 来说，(3) 式成立即可。

用 X_i 表 S 中子集 X 在 S_i 中的投影。显然所有的 X_i $(X \varepsilon \widetilde{B})$ 组成 S_i 上的一个漏斗基，由 S_i 之紧致性及引理 7 得

$$Y_i = \cap \{\overline{X}_i: X \varepsilon \widetilde{B}\} \neq \phi, \quad i \varepsilon I.$$

再用**选择公理**取 $y_i \varepsilon Y_i$ 而得 S 之一点 y，它在 S_i 中之投影恰为 y_i，$i \varepsilon I$。由引理9 知 $\widetilde{B}$ 为 S 上一超漏斗，从而易知其在 S_i 上之投影为 S_i 上一超漏斗，$i \varepsilon I$。现在任取 $X \varepsilon \widetilde{B}$，再任取 y 的一基本邻域 U，于是便存在有限个 S_i（不妨设为 S_1，…，S_n）及 y_i 之邻域 U_i $(i = 1, \cdots, n)$ 使

$$U = \{U_1 \times, U_2 \times, \cdots \times U_n\} \times \{S_i: i \varepsilon I - \{1, 2, \cdots, n\}\}.$$

由 $y_i \varepsilon Y_i$ 知 U_i 与所有 X_i（$X \varepsilon \widetilde{B}$）均相交，而由投影漏斗之极大性知 U_i 必在投影漏斗中，从而有 $Z_1, \cdots, Z_n \varepsilon \widetilde{B}$ 使 Z_i 在 S_i 中之投影恰为 U_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）。于是非空集 $Z = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$ 就必含于 U，而由 $Z \varepsilon \widetilde{B}$ 知 $U \varepsilon \widetilde{B}$，故 U 与 X 相交。由 X 与 U 之任意性知 $y \varepsilon \overline{X}$，再由 X 之任意性知 $y \varepsilon \cap \{\overline{X}: X \varepsilon \widetilde{B}\}$。故 (3) 式对 $\widetilde{B}$ 成立。证毕。

附带证明 Tychonoff 定理能推出选择公理如下：设

$$F = \{S_i: \ i \varepsilon I\}$$

为诸非空集合 S_i 组成之类。令 a 为不属于诸 S_i 的一个取定的元素。定义

$$X_i = S_i \cup \{a\}, (i \varepsilon I)$$

之闭集为 X_i，空集，S_i，以及 X_i 之所有有限子集。于是 X_i 即成为紧致拓扑空间（用闭集来验证是很容易的）。故由 Tychonoff 定理即知

$$Y = \times \{X_i: \ i \varepsilon I\}$$

为紧致拓扑空间。再对每个 $i \varepsilon I$ 定义

$$Y_i = \{y \varepsilon Y: \ y \text{ 在 } X_i \text{ 中之投影 } \varepsilon S_i\},$$

于是 Y_i 为 Y 之闭集，而且诸 Y_i（$i \varepsilon I$）作成 Y 上的一个漏斗基底，由引理 7 知

$$\bigcap_{i \varepsilon I} Y_i = \bigcap_{i \varepsilon I} \overline{Y}_i \neq \phi \text{（空集）}.$$

在此交中任取一点 y，则由 y 在 X_i 中之投影 $y_i \varepsilon S_i$（$i \varepsilon I$）即能得到 F 上的一个选择函数 f 使 $f(S_i) = y_i$，

$i\varepsilon I$. 故由 Tychonoff 定理可推出选择公理.

下面我们将仿保范扩张定理证明的基本思想，先证出引理 10，然后再证 § 8 中介绍的 Hahn-Banach 扩张定理，最后再证其推广性.

引理10. 设 f 为实向量空间 V 上的一个次线性函数，ψ 为真子空间 T 上的一个线性函数，$v \,\bar{\varepsilon}\, T$. 如果在 T 上恒有

$$\psi(x) \leqslant f(x), \quad x \,\varepsilon\, T,$$

则 ψ 可扩充为 $T \dotplus [v]$ 上的一个线性函数 ψ^* 且仍恒有

$$\psi^*(x) \leqslant f(x), \quad x \,\varepsilon\, T \dotplus [v].$$

证明. 设 θ 为 V 中零向量. 于是由

$$f(\theta) = f(2\theta) = 2f(\theta)$$

知必有 $f(\theta) = 0$. 今对任意 $x \,\varepsilon\, V$，由

$$0 = f(\theta) = f(x - x) \leqslant f(x) + f(-x)$$

得

$$f(x) \geqslant -f(-x), \quad x \,\varepsilon\, V$$

特别地，当 $y \,\varepsilon\, T$ 时，即有

$$f(y+v) \geqslant -f(-y-v)$$

于是便有

$$\sup_{y \varepsilon T}\{-\psi(y) - f(-y-v)\} \leqslant \inf_{y \varepsilon T}\{-\psi(y) + f(y+v)\}$$

故可取定一实数 c 使

$$\sup_{y \varepsilon T}\{-\psi(y) - f(-y-v)\} \leqslant c \leqslant \inf_{y \varepsilon T}\{-\psi(y)$$

$+f(y+v)\}$.

现在就在 $T\dot{+}[v]$ 上定义

$$\psi^*(x+av)=\psi(x)+ac,\quad a\text{为任意实数.}$$

很容易验证 ψ^* 是 $T\dot{+}[v]$ 上的一个线性函数并为 ψ 之扩张。最后只要证明

$$\psi^*(x+av)\leqslant f(x+av),\quad a\text{ 为任意实数,}$$

就够了。为此不妨设 $a\neq 0$ 而令 $y=\frac{1}{a}x$。

于是当 $a>0$ 时，应有 $ac\leqslant a[-\psi(y)+f(y+v)]$，故

$$\psi^*(x+av)=\psi(x)+ac\leqslant a\psi(y)+a[-\psi(y)+f(y+v)]=f(x+av);$$

当 $a<0$ 时，则应有 $ac\leqslant a[-\psi(y)-f(-y-v)]$，故仍有

$$\psi^*(x+av)=\psi(x)+ac\leqslant a\psi(y)+a[-\psi(y)-f(-y-v)]=f(x+av).$$

证毕。

现在来证 **Hahn-Banach 扩张定理。**

令 F 为所有这样的线性函数 ψ 作成的集合：ψ 为 φ 在 V 的某个含 S 的子空间 T 上的扩张且 $\psi(x)\leqslant f(x)$，对任意 $x\,\varepsilon\,T$。以扩张关系为“序”时，F 即为一个部分序集。因为一串子空间的升链：

$$T_o\subset T_1\subset\cdots\subset T_\sigma\subset\cdots$$

的并集 T 仍为子空间，且 φ 的相应的扩张的线性函数所成的升链：

$$\psi_0 \subset \psi_1 \subset \cdots \subset \psi_\sigma \subset \cdots$$

自然就定义了 T 上的一个线性函数 ψ 使 $\psi(x) \leqslant f(x)$, $x \varepsilon T$。故由 **Zorn 引理**知 F 有极大元素，设 ψ 为其一。由 ψ 之极大性及引理10知 ψ 就是 V 上的一个满足定理中的要求的线性函数。证毕。

Hahn-Banach 扩张定理是线性泛函中著名的 **Banach-Hahn 保范扩张定理**的推广。因若 ψ 是实数域上线性赋范空间 V 的一个线性流形 S 上的一个线性泛函，则对 $x \varepsilon V$ 可定义

$$f(x) = \|\varphi\|_S \|x\|,$$

于是由范数之性质很容易验证 f 是 V 上的一个次线性函数。再由 $\|\varphi\|_S$ 之定义知

$$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_S \|x\| = f(x), \quad x \varepsilon S.$$

从而在 S 上恒有

$$\varphi(x) \leqslant f(x), \quad x \varepsilon S.$$

故由上之扩张定理知有 V 上的线性函数 ψ 使 ψ 为 φ 在 V 上的扩张，且在 V 上恒有

$$\psi(x) \leqslant f(x), \quad x \varepsilon V.$$

即在 V 上有 $|\psi(x)| \leqslant f(x)$, $x \varepsilon V$.（因 $\psi(-x) = -\psi(x)$，而 $f(x) \geqslant 0$ 故也）。于是

$$|\psi(x)| \leqslant \|\varphi\|_S \|x\|,$$

从而 $\psi(x)$ 为线性泛函，再由上式及 ψ 为 φ 之扩张即知有

$$\|\psi\|_V = \|\varphi\|_S$$

故 ψ 为 φ 之保范扩张。

Сухомлинов 还曾经把保范扩张定理推广到复数域及四元数体上的向量空间中去（Матем. сборн, 3 (45)）。

把上面对扩张定理的证明与原来对保范扩张定理的证明（当空间不可分时，用**整序定理及超穷归纳法**）相比，显然上面的证明要简单易懂得多。这当然是Zorn引理所起的简化作用。虽然它与整序定理是等价的，但陈述形式不同，就各有其优点了。犹如上节用 Tukey 引理来证“基底存在定理”又比用 Zorn 引理来证就更为简单一样。所以熟悉选择公理的各种等价命题，在处理问题时，便可灵活运用，大有好处。

最后用超穷论法来证明抽象代数中一个比较漂亮的定理："**任意域 F 恰有一个代数封化扩张**"，即 F 的代数封化域的**存在与唯一性**定理（在同构意义下）

域 F 的一个扩张 E 叫做 F 的**代数扩张**，如果 E 中任意元素 α 是 F 上的**代数元素**，即 α 为 F 上一多项式的根。域 K 叫做一个**代数封闭域**，如果 K 除自己外，不再有代数扩张。又如果 K 为 F 的代数扩张，且 K 又为代数封闭域，则说 K 是 F 的一个**代数封化扩张**（或**代数封化域**）。

引理11. 若 E 是 F 的代数扩张，K 是 E 的代数扩张，则 K 是 F 的代数扩张（即代数扩张之代数扩张仍为代数扩张）。

事实上，若 $k \varepsilon K$，则有 E 上多项式

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

以 k 为根。命 $\Omega = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则 $\Omega(k)/\Omega$ 与 Ω/F 均有限，故 $\Omega(k)/F$ 有限，从而知 k 为 F 上的代数元素。

引理12. 若 $E = F(S)$，而 S 中所有元素均为 F 上的代数元素，则 E 为 F 的代数扩张。

因 E 中任意元素 β 恒可以用 F 中元素为系数而表为 S 中某些元素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的有理式，故 $\beta \varepsilon F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$。再由

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/F$$

有限，即知 β 为 F 上的代数元素。

引理13. 若 K 是 F 的代数扩张，而 F 上任意不可分多项式在 K 上能完全分解为一次因式之积，则 K 为 F 的代数封化域。

只要证明 K 的任意代数扩张 Ω 的任意元素 $\alpha \varepsilon K$ 即可。由引理 11 知 Ω 为 F 的代数扩张，故 α 为 F 上某个不可分多项式 $f(x)$ 的根，但 $f(x)$ 在 K 上能分为一次因式之积，所以必有 $\alpha \varepsilon K$。

引理14. 若环 R 有1，且理想 $N < R$，则 N 必能扩张成极大理想。

首先可设 $\widetilde{F}$ 为 R 中含 N 的所有真理想作成的类。于是在“包含”关系下，$\widetilde{F}$ 为一部分序集。任取其中一个单线子集：

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\sigma \subset \cdots$$

来看。令 M 为诸 N_σ 之并集，则易验证 M 为一理想，且由 $1 \notin N_\sigma$ 知 $1 \notin M$，故$M<R$，从而$M \varepsilon \widetilde{F}$ 而为上之单线子集之上界。由 **Zorn 引理**即可证引理矣。

现在来证

定理．任意域 F 的代数封化扩张恒存在且唯一（在同构意义下）。

证明．取 F 上任意一个不可分多项式 $f(x)$，设其首项系数为 1，次数为 n。相当于此f，取n个文字α_{1_f}，α_{2_f}，…，α_{n_f}。令 S 为所有这样多项式所相当的所有文字的集合，现在看多项式环 $F[S]$ 上的多项式：

$$f(x)=(x-\alpha_{1_f})(x-\alpha_{2_f})\cdots(x-\alpha_{n_f}) \tag{4}$$

以 β_f 表其任意一个系数，然后令 N 为所有这样元素的集合：

$$\beta_{f_1}g_1+\beta_{f_2}g_2+\cdots+\beta_{f_m}g_m,$$

$$g_i \varepsilon F[S],\ \beta_{f_i} \text{ 如上所选},$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ m\text{为任意自然数}.$$

容易验证 N 为 $F[S]$ 的一个理想。今断言 $1 \notin N$。假若不然，则有

$$1=\beta_{f_1}g_1+\beta_{f_2}g_2+\cdots+\beta_{f_s}g_s. \tag{5}$$

令 E 为 $f_1(x)\cdots f_s(x)$ 在 F 上的分解域，在 E 中取 $f_i(x)$ 的诸根以代替（4）中的 $\alpha_{1_{f_i}}$，$\alpha_{2_{f_i}}$，…，而代入（5）得 $1=0$ 为矛盾。

由引理14（等于要用一次 **Zorn 引理**）知N可扩充

为 $F[S]$ 的一个极大理想 M。从而得到剩余类域 $F[S]/M$。因 $M<F[S]$，故 M 不含 F 中非 o 元素，从而 F 中不同元素在剩余类域 $K=(F[S]/M)$ 中仍不同，在同构意义下即可视K为F之扩张，而有$K=F(S)$。当然，此时 S 中元素是经过等置了的。由于 M 含（4）中所有系数，故在 K 中来看（4）即知其所有系数均为o而得

$$f(x)=(x-\alpha_{1_f})(x-\alpha_{2_f})\cdots(x-\alpha_{n_f}).$$

于是由引理13知 K 为 F 的代数封化扩张域（可简曰F的代数封化域）。存在性得证。

现再证唯一性。设K_1，K_2均为F的代数封化域。试看 K_1/F 的子扩张到 K_2/F 的子扩张的使 F 之元素不动的同构映射。设 σ，τ 是两个这样的映射，当 τ 为 σ 的扩张时，即规定 $\sigma<\tau$。于是所有这些映射便作成一个部分序集。任看其中一个单线子集：

$$\sigma_o<\sigma_1<\cdots<\sigma_\rho<\cdots \qquad (6)$$

即有 K_1 在 F 上的一串子扩张与之相应：

$$E_o\subset E_1\subset\cdots\subset E_\rho\subset\cdots \qquad (7)$$

令 E 为诸 E_ρ 之并集，则易知E为一子扩张，且(6)又确定了K_2中与（7）相应的一串子扩张：

$$\Omega_o\subset\Omega_1\subset\cdots\subset\Omega_\rho\subset\cdots,\Omega_\rho=\sigma_\rho(E_\rho).$$

令 Ω 为诸 Ω_ρ 之并集，则（6）又确定了 E 到 Ω 上使 F 的元素不动的一个同构映射 σ。于是 σ 就是（6）的一个上界。再由 **Zorn 引理**即有一个极大的同构映射

ρ 把 K_1 的子扩张 K_1^* 映射成 K_2 的一个子扩张 K_2^* 而使F的元素不动。断言必有 $K_1^* = K_1$。若不然，则有 $\alpha \varepsilon K_1$，而 $\alpha \notin K_1^*$。令 $p(x)$ 为 α 在K_1^*上的不可分多项式，并设 ρ 把 $p(x)$ 映射成K_2^*上的$q(x)$。由于 K_2 为 F，从而为 K_2^* 的代数封化域，故 $q(x)$ 在 K_2 中有根 β。所以ρ又可扩张成$K_1^*(\alpha)$到$K_2^*(\beta)$上的同构映射，而与 ρ 之极大性矛盾。故必有 $K_1^* = K_1$。再由 $\rho(K_1) = K_2^*$ 知 K_2^* 为代数封闭的，从而 $K_2^* = K_2$。K_1 与 K_2在 F上同构。证毕。

§11．历史概况与近代发展情况简介

Cantor(1874，1879) 与 Poincaré (1910) 先后用不同方法证明连续统基数 c 是不可数的．现代分析中的有力工具之一的所谓 **Cantor-Hilbert 对角线方法**就根源于此．Hilbert 是支持 Cantor 的工作与选择公理的著名数学家之一．

1904 年，Zermelo 提出选择公理，并用它来证明了整序定理 (Math.Ann．(59)，p．514)．

实际上，在这以前，选择公理已用于数学中．仅有的例外是 Peano (1890) 在一篇微分方程的著作中，在构造一个函数时，他明确地表示不能用选择公理来作．Cantor (1883) 就提到要有整序定理才行，并表示以后再论此事．1900 年在巴黎的数学会上，Hilbert 的著名发言中就明确提到，一个集合是否可整序的问题尚未解决．

1905年，Vitali 用选择公理首先构造出不可测集的例子 (Sur Problema della Mesura dei Gruppi di Punti di una Retta (Bologna)．)．同年，F．Bernstein 未用选择公理而证明了后人所谓Bernstein定理(Math．Ann．(61)，p．117)．

1906年，Hessenberg 用整序定理证明了很受人欢迎的“超穷基数的等方定理”，它给基数的运算带来了极大的方便。同年，Russell 提出了与选择公理等价的交点唯一定理（Proc. London Math. Soc., Ser. 2, (4), p. 29）。

1914 年，Hausdorff 在空间转动理论及变换群的分剖结果的基础上，用选择公理证明了使人感到奇怪的**分球面定理**（见§10），加重了部分数学工作者对 Vitali 例子的不愉快感，而更不甚赞同选择公理（Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig)）。

1922 年，Kuratowski 提出了**第一极大原理**，其后由Zorn (1935) 用整序定理严格论证，而成以后很多人乐于使用的 **Zorn 引理**；在同一文中 Kuratowski 又提出**精选原理**。

Fraenkel (1922—1937) 首先在**有原子的集合论**（以后简曰 **ZFA**）里，通过**模型理论**来解决选择公理的**独立性**问题（见后 1963—64 的情况陈述）；接着 Mostowski (1938—39) 对此又引进了**支撑**的概念，更确切地刻划了**置换模型**；其后 Specker (1957) 又引进**漏斗**的提法，使论证更为简明。

1924年，Banach 与 Tarski 在 Hausdorff 定理的础基上更进一步证明了令人惊奇的**分球定理**（Fund. Math. (6), p.244）（见§10“**分球奇论**”）。这样自然就使有的数学工作者更加不赞同选择公理。不过，事实上，

Banach 也照样用**整序定理**与**超穷归纳法**来证明**保范扩张定理**。

同年，Fund.Math.(5), pp.147—154发表 Tarski 证明了基数开方定理与等方定理均等价于选择公理；并问**基数倍等定理**能否推出选择公理？此问题一直到五十年后，才由 Sageev 与 Halpern and Howard 作出否定的回答（见后73—75）。

1926年，Lindenbaum 与 Tarski 宣布广义连续统假设可推出选择公理；但首先公开发表证明的是 Sierpiński(1947)；其后，Specker(1954) 利用引理：

"若 $a \geq 5$，则 $2^a \not\leq a^2$"

又简单地证明了此结果；这方面的成就当然与早期 Gödel (1938) 的著名工作是分不开的.Godel (1938—1940) 提出了创造性的**可构造集合**的概念，论证了选择公理与广义连续统假设的**相容性**。此著名工作出来后，对整个**数学基础**的研究起了巨大的推动作用。后经 Mostowski(1949), Shepherdson(1951), Levy(1957), Montague (1961) 等进一步对**可传模型**理论的研究，便可以在 **Zermelo-Fraenkel 公理集合论**（以后简曰 ZF）里，通过 **Gödel 运算**，具体表出一个很简明的含所有序数的**最小可传模型**，它满足**可构造公理**，于是由**全域**可整序而知其满足选择公里，再在该模型中还有$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$，即又知其满足广义连续统假设。

1930年，Marczewski 用选择公理证明了序的扩张

定理。其后Scott(1954)指出可用较弱的质理想定理来代替选择公理而证明序的扩张定理。

1936年，Stone发表了一篇很长的论文，证明了表示定理并证明它等价于质理想定理。这是数学中有影响性的工作。

Teichmüller (1939) 与 Tukey (1940) 独立地证明了第二极大原理。

Mostowski (1939) 在 **ZFA** 中用所谓**有序的 Mostowski 模型**证明了选择公理独立于序化定理；Halpern and Levy(1964) 才在 **ZF** 中证明序化定理不能推出选择公理，而彻底解决了此独立性问题。

1942年，Bernays提出了**相依选择原理**；Feferman (1964) 宣称此推不出选择公理；Levy (1964) 把此原理及可数选择公理分别推广成**命题** $\mathbf{DC}_{\aleph}$ 与 $\mathbf{AC}_{\aleph}$ 而研究其关系，此再与Jech (1966) 和 Jensen (1967) 的结果联系起来便得：

选择公理 $\rightarrow DC_{\aleph_1} \rightarrow DG_{\aleph_0}$（即相依选择）$\rightarrow AC_{\aleph_0}$（即可数选择），且其中每个后者恒真正弱于其前者。

Rado(1949), Scott (1954), Tarski(1954), Rubin and Scott(1954), Łos and Ryll-Nardzewski(1955), Mycielski (1964) 等研究了后面汇总 I 中的命题(3)—(6)的等价性。

Kelley (1950) 证明了 Tychonoff 定理能推出选择公理。

Łoś and Ryll-Nardzewski (1951) 及 Luxemberg (1962)均用质理想定理来证 Hahn-Banach 扩张定理。

1952年，Vaught 证明了极大不交子类存在定理等价于选择公理。

Kurepa (1953) 提出了**反链原理**；Halpern (1962, 1972) 论述了选择公理独立于反链原理（在 ZFA 中）。

1954年，Tarski (Bull. Am. Math. Soc. (60), p. 390) 指出可用较弱的质理想定理来代替选择公理而证明 **Artin-Schreier 定理**；他又在不假定选择公理的前提下，提出了基数的“**后继**”概念并证明：(1)每个基数必有一个**1—后继**；(2) 若每个基数均有**2—后继**，则可推出选择公理。

Jech (1966) 指出在没有选择公理的集合论里，不可能证明每个基数必有一个**3—后继**；以后，Truss (1973)又证明了：若每个基数有一个3—后继，则对每个超穷基数 a 必有 2a = a.

Henkin (1954) 证明了质理想定理等价于**紧致性定理**.

Scott (1954) 证明了格的极大理想定理等价于选择公理。

1955 年，Kinna 与 Wagner (Funa. Math. (42), p. 75) 证明了**精选原理**等价于：对每个集合 S 恒存在序数前段 A (σ) 及 S 到 A (σ) 的幂集合内的一个一一对应。

Mrówka(1955)首先提供了§8命题13°的等价性；其后 H. Rubin and J. Rubin(1963)与Rousseau(1965)等对此又有补充和改进。

Mycielski (1961) 与 Levy (1963) 均研究了**命题 P_n** (所谓命题 P_n 即：对每个图象G，如其每个有限部分图象是可以n— 作色的，则G亦然.)。通过紧致性定理可知质理想定理能推出P_n，而P_{n+1}又能推出P_n，这再加上 Läuchli (1971) 的结果："由P_3可推出质理想定理"，便得到质理想定理与P_3的等价性。

1962年，Ward 证明了**弱 Tychonoff 定理**等价于选择公理。同年，Levy 指出选择公理独立于**多个选取公理** (在 ZFA 中)。

1963 年 H. Rubin and J.Rubin 证明§8的命题18°可推出选择公理，从而得其等价性。

Gohen (1963—66) 的主要工作是发明了**强制方法**而得出大家所熟知的著名的关于连续统假设与选择公理的独立性结果。

今把 **Cohen 模型**扼要地描述如下：

设 M 是满足选择公理的**可传模型**. $B\varepsilon M$ 为一个 Boole代数且是**完全的** (即其非空子集恒有**最小上界**和**最大下界**)。如果存在B上的一个所谓 **M— 同类超漏斗** $G\subseteq B$ (即超漏斗G满足条件：$A\subseteq G$, $A\varepsilon M\rightarrow A$ 之最大下界 εG)，则 M 可扩张成**同类模型** M [G]。(到此步可得出：可构造公理在 ZF 中是不能证明的。因能

作一扩张 M [G] 含一个**不可构造集合**)。进一步可得 $M \subseteq N \subseteq M[G]$，而 N 为 ZF 之一模型，叫做 M 的一个**对称扩张**。由于 M 中每个部分序集可确定一个同类扩张，故若取两个适当的由**强制条件**作成的部分序集，则可分别得到两个不同的同类扩张与对称扩张，即分别得到基本 Cohen 模型与第二 Cohen 模型。在基本 Cohen 模型中，由实数集是不能整序的，从而知其不满足选择公理。同样，在第二 Cohen 模型中含一个可数集 A，通过 A 即知其不满足**两元集的可数类的选择公理**。另外，可取一适当部分序集使在其所确定的 M [G] 中有 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$。Cohen 简记为：

$$V = L \to GCH \to AC \text{（但不能反推）}$$

其中 V = L 表可构造公理；GCH 表广义连续统假设。

在 Cohen 模型出来之前，如上面所述，很早就有**基本 Fraenkel 模型**和**第二 Fraenkel 模型**，通过此二模型，在 ZFA（即 ZF with atoms）中，分别如上解决了相应的独立性问题。此虽然在今天来看，是逊色于 Cohen 模型，但 Cohen 的工作未尝不受其影响而才有所推进的。

Halpern and Levy（1964）证明基本 Cohen 模型 N 中每个集合可序化，从而知序化定理推不出选择公理。同样，由 N 满足精选原理，知精选原理推不出选择公理。

Bleicher（1964）证明了 §8 中的命题 19° 的等价性

（参看 §9 例 14 下面的附注）。

关于质理想定理推不出选择公理的工作，先是 Halpern（1964）在 ZFA 中论证后，再由 Halpern 与 Levy（1967）用前一年 Halpern 与 Läuchli 的结果而在 ZF 中证明的。

1966年，Jech 的一般定理得证后，自然就推出了：质理想定理独立于**弱超漏斗定理**（每个无穷集合有一个非平凡的超漏斗）。

1967 年，Scott，Solovay 与 Vopěnka 引进了所谓 **Boole 值**的提法，它是上面陈述的M— 同类超漏斗 G⊆B 所紧密联系的所谓 **Boole 值模型** M^B 的概念的出发点，由此进一步较简明地描述了上面介绍的 Cohen 模型。

Mathias（1967）仿基本 Cohen 模型的作法，得到一个模型，它满足精选原理而不满足质理想定理与序的扩张定理。从而精选原理就不能推出质理想定理与序的扩张定理，自然，序化定理就更推不出质理想定理与序的扩张定理了。他再分析基本 Cohen 模型，即知**可整序集的类的选择公理**推不出选择公理。

Pincus（1968）证明了：**有限集合作成的类的选择公理**推不出序化定理。

Felgner（1969）曾误得出：**共尾原理**可推出选择公理。后经 Morris。发现其错误而改得：共尾原理加上序的扩张定理即可推出整序定理。

Pincus (1969, 1974) 用**第一嵌入定理**把**有序的 Mostowski 模型**嵌入 ZF 中一模型使其满足质理想定理而不满足精选原理。

Felgner (1971) 证明了：序的扩张定理推不出质理想定理；序化定理推不出精选原理。

Pincus (1972) 证明了：Hahn-Banach 扩张定理推不出质理想定理。

n 元集合的类的选择公理（对所有 n）也推不出**有限集合的类的选择公理**的工作，是先由 Levy (1962) 在 ZFA 中证明，而后由 Pincus (1969, 1973) 转化到 ZF 中去的。

Felgner and Jech (1973) 证明了：§8 中的命题 15°—18° 在 ZFA 中真正弱于选择公理，但在 ZF 中它们均等价于选择公理。更确切地说，他们在 ZFA 中证明了（关于 §8 的命题）：

$$15° \to 16° \to 17° \to 18°;\ 21° \to 20°;\ 1° \nleftrightarrow 20;\ 20 \nleftrightarrow 21°$$

而在 ZF 中则有

$$18° \to 1° \to 21° \to 20° \to 1°,$$

即得 20° 与 21° 之等价性。

1972—1973 年，Bell and Fremlin 以及 Hajnal and Kertész 分别证明了 §8 中命题 23° 及 24° 的等价性。即分别得到选择公理的所谓**几何形式**与**代数形式**。

1973年，Cowen 用类似 Rado (1949, 1971) 引理的命题，得到与质理想定理等价的一些定理；Fleischer

给出一个**一般的两元关系**而得到**对类的 Zorn 引理**的很一般的形式；Kunen 证明了：

“仅由存在可数个**可测基数**是推不出选择公理的”。

Truss 仿用 H. Rubin and J. Rubin (1963) 的办法，证明了一些用基数与序数来表达的可推出选择公理的命题；在另一文中，他又把 Tarski 的结果：

$$|X|<|S(X)|$$

推广成

$$|X|<|W(X)|$$

其中 X 表任意集合，$S(X)$ 表 X 的可整序子集作成的类，$W(X)$ 表 X 的整序子集作成的类。他还证明了：在 **Solovay-Levy 模型**（或满足 $\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$ 的任何模型）中，有

$$|S(2^{\aleph_0})|\neq 2^{2^{\aleph_0}},\quad |W(2^{\aleph_0})|\neq 2^{2^{\aleph_0}}.$$

他又在 (1973—74) 的一文研究了**有限集的类的选择公理**的各种特例，并由此可去掉Mostowski(1945, Fund. Math. (33), p. 137) 的一结果的假设条件之一，且在 n **元选**与**有限选**（见汇总结果Ⅱ）之间还有更一般的选择公理，这自然是对 n 元选（对所有 n）也推不出有限选的进一步补充。

Sageev (1973) 及Halpern and Howard (1974) 分别独立地否定回答了 Tarski (1924) 所提出的公开问题。前者作出一模型不满足选择公理而满足超穷基数

的倍等定理；后者作出一模型满足此倍等定理而不满足两元选（见汇总Ⅲ），自然不满足序化定理而更不满足选择公理．接着，前者又在1975年，作出ZF中一模型，满足倍等定理、序化定理及$\aleph_0$-**选取公理**，而尚不满足可数选择公理．

$\aleph_0$-选取公理即**可数多个选取公理**：

对任意非空集之类，有一函数存在，它取每集合之一可数子集为值，

此公理可简记为Z(ω)．

1974年，Pincus 作出一模型，由此得出：

有限选推不出**可数集合的类的选择公理．**

Monor 证明了：

没有 Levy 的**一般相依选择原理** DC_α 亦能证明超穷基数的倍等定理，

并作出一模型使

$2|G^*|>|G^*|$，而 DC_α 对所有 $\alpha<\aleph$满足，故相依选择推不出超穷基数的倍等定理．

Metelli，Salce 用 Zorn 引理与乘积定理来证明序数集的整序性，并由其一般结果即得到§8命题22°的等价性．

Felgner（1974）证明了：可数个可数集之并集可数（简曰 **UA**）与可整序集之可整序并集可整序（简曰 **UW**）彼此独立；以及UA加上UW再加上质理想定理也推不出可数选择公理．

Jech (1974) 证明了：如 K 为**弱紧致基数**，则无**单纯 Boole 代数**存在，其基数为 K；由广义连续统假设可证单纯Boole代数之基数为**正常的**；在可构造公理下，对每个不可数而正常的**非弱紧致基数 K**，必存在一个单纯 Boole 代数，其基数为 K。

Mostowski (1975) 对 Cohen 的强制方法给了一个简单而漂亮的解释。作为应用，又证明了连续统假设的独立性。

Rockingham (1975) 指明用质理想定理即足以证**紧致性定理**。

Pincus；Prikry (1975) 证明了：设 H 是由 ZF 中模型 M 而得出的 Cohen-Halpern-Lévy 模型，则当M中存在所谓 **Lusin 集合**时，H 中亦然。另外，可视 Feferman (1965) 的**模型 F** 为H之**子模型**而不含 Lusin 集合者，且在实数集中不存在 Vitali 集合与 Hamel 底。

Howard(1975)证明了：质理想定理加上 **Łoś 定理**即可推出选择公理。

Monro(1975) 证明了：所有 Dedekind—有限的集合均为有限集合时，也推不出可数选择公理。

Hickman (1975) 考虑在没有选择公理时，不含无穷降链的序集未必是整序集。于是定义此为**广义整序集**，其序型为**广义序数**。他证明了此二者有许多性质相同于整序集与序数的性质。特别地，广义整序集

到自身的**相似映射**必为**恒等变换**。不过，广义序数不是单线序的，然而它还不具**树枝形**性质。

Hulchinson (1976) 引进了如下概念：在ZFC的一个模型 M 中，一个序数说是**准确地可数的**，如其前段作成可数类。他研究了 M 中所有准确地可数的序数作成的集合中的各种可能的序型的分类问题。

Case (1976) 研究所谓**整检问题**，类似于“部分序”能否扩充成“序”的问题。

Andréka 等重新在 1976 年证明：“**基本的等价模型有同构的超幂**”定理。

一个拓扑空间叫做 **Baire 空间**，如其稠密开集之可数交恒稠密。Oxtoby(Fund. Math. 1960—61(49), p. 157) 曾在连续统假设下，证明存在着 Baire 空间其平方非 Baire 空间。Cohen(1976) 用其强制方法来构造这样的空间从而指出连续统假设在此不是必需的。

Podewski 等 (1976) 对有足指数的非空集作成的类 $F=\{F_i: i\varepsilon I\}$ 引进所谓**内射选择函数**及**最大可表示子类**（即有内射选择函数的最大子类），与**临界子类**，并定义 F 之**核**为所有临界子类之并，而证明了：如 F 有一个最大可表示子类 M，则有一最大临界子类 G 使 $M=(F—F$ 之核$)\cup G$。作为推论之一，得出了最大可表示子类存在之充要条件。

一个与广义连续统假设有关的值得注意的 Silver 定理 (1974) 是：如对每个 $\beta<\omega_1$ 有

$$2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1},$$

则

$$2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}.$$

Galvin and Hajnal (1975)推广了此结果。

Baumgartner and Prikry(1976—77)对 Silver 定理给出一个初等证明并指出此结果不难再改进。例如条件

"$2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$， 对每个 $\beta<\omega_1$"

可改进为

"$\{\beta<\omega_1: 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}\}$ 为一平稳集合"。

同时还论述了定理的一些推广情形，包括 Galvin 等的推广在内。

今年，Pincus 还详细地研究了一个陈述 Φ 的一个 ZF 模型转化到 Φ 的一个 $ZF+DC$ 的模型中去的问题，此处 DC 表相依选择原理。由于以往的关于独立性的工作，除与 DC 直接有关的以外，其它的均不涉及 DC，且那些模型均不满足 DC，故 Pincus 考虑加上 DC 后，对原有的与独立性有关的结论又当如何？他证明了：

1° DC 加上序化定理也推不出选择公理；

2° DC 加上有限选择公理也推不出序化定理（这自然是 Lauchli (1964) 与 Pincus (1972) 的结果的进一步成果）；

3° DC 加上序化定理也推不出序的扩张定理（这

是 Mathias (1967) 的结果的深入一步)；

4° DC 加上序化定理也推不出精选原理（这是 Mostowski (1958) 与 Felgner (1971) 的结果的深入)，

而且后三者的模型还满足**可数多个选取公理**（即 $Z(\omega)$)。

此外，他还回答了 Sageev (1975) 提出的问题，即得到

5° $Z(\omega)$ 推不出序化定理。

在这篇较长的著作中，Pincus 还得到另一些加上 DC 的与独立性有关的结果，由于叙述较长，故从略。他又在引言的最后提出了三个有趣的公开问题。他与 Solovay 现在正分别用不同方法来研究 DC 加上 Hahn-Banach 定理是否也推不出质理想定理的问题。

最后，就编者现已查到的资料来说，最近两年还有一些关于基数、序数与 Boole 代数的结果，不在此一一赘述了。

概括起来，本学科的发展大致可分四个阶段：

（一）萌芽时期（1874—1906)。本阶段主要是对超穷数的研究，以 Cantor 的工作为基本而主要的内容，以Hessenberg(1906)定理为本阶段发展达到高峰的一个重要标志。这个阶段是本学科在形成中基本处于受压抑而斗争的时期，直到 Cantor 的工作受到较多支持时，才基本上奠立了本学科的基础(请参看后附Cantor

的早期文献)，但其理论上的重要基础——选择公理，则尚处于在学术上有较大争论而动摇的境地。

(二) 发展时期(1904—1940)。本阶段以 Zermelo (1904) 提出选择公理而证明整序定理为起点，在学术上展开了激烈的争论，分球奇论 (1924) 的出现，使争论达到高潮。与此同时，也开展了对选择公理的等价性、相容性、独立性等方面的工作，而到 Fraenkel 模型 (1922—37) 逐渐形成，Zorn 引理 (1935) 与 Tukey 引理 (1940) 相继出现，特别是 Gödel(1938—40) 的相容性结果，等等著名工作出来为止，才使争论初步趋于统一，反对者大为减少，而为本学科及其应用的发展奠定较巩固的基础。

(三) 壮大时期 (1936—1964)。本阶段在关于各种公理、原理、命题的等价性、相容性等方面的工作上，继续取得大量成果。如与选择公理等价的命题就发展到 13 个之多；关于与质理想定理等价的工作，从 Stone (1936) 起，特别是在 (1949—64) 这一时期中，取得了丰富的成果。Cohen 的著名工作问世，就成为本阶段与下阶段的一个转折点。

(四) 胜利发展时期 (1963—现在)。自从 Cohen (1963—66) 发明了强制方法而得出选择公理与连续统假设均独立于 ZF 的著名结果后，在学术争论上，公理主义者 (主要是其中符合辩证唯物论观点的) 赢得了决定性的胜利。从 1963年到 1976 年，平均每年要

在一个不满足选择公理的模型里，证明出一个“怪”定理，这些“怪”定理不仅比起分球奇论要“怪”得多，而且与通常熟知的数学结论大唱反调。这就有力地说明了选择公理在数学基础上的重大意义。与此同时，独立性、等价性、相容性等问题的研究工作，相继推陈出新。各种各样的超穷数、等价命题与关于独立性的成果大量涌现出来。如与选择公理等价的重要命题，就由原来的13个发展到23个；关于独立性的主要定理，就有三十几个之多。这十几年的研究工作，仅就文献的数量来说，就快超过前九十年的了。

汇 总 结 果 I

前面提过的Stone的著名工作，不仅是Boole代数中，而且是数学中的一个重要结果。因为集合代数的重要性，远不止于在代数范围内，例如概率场中的域就是一个集合代数。另一方面，质理想定理的重要性也是显然的，仅从它与超漏斗的对偶关系，便可见一般。如果说选择公理及其等价命题是近代数学中的第1号大工具，则质理想定理及其等价命题就应该是第2号大工具。所以在数学的许多分支中，研究与质理想定理等价的工作较多，是不足为奇的。现在就把从1936年起到目前为止，就编者所知，有关这方面的主要成果汇总如下（因与选择公理等价的命题已在§8中详细介绍了，故不再汇总）：

下列诸命题彼此等价：

（1）质理想定理；

（2）Stone 表示定理；

（3）超漏斗存在定理；

（4）一致性定理；

（5）关于**紧致 Hausdorff 空间**的 Tychonoff 定理；

（6）**广义 Cantor 空间**的紧致性定理；

（7）命题 P_3 成立；

（8）紧致性定理（数理逻辑中的）。

此外，Cowen (1973) 还得到一些等价结果，由于陈述较长，故从略（请参看[86]）。

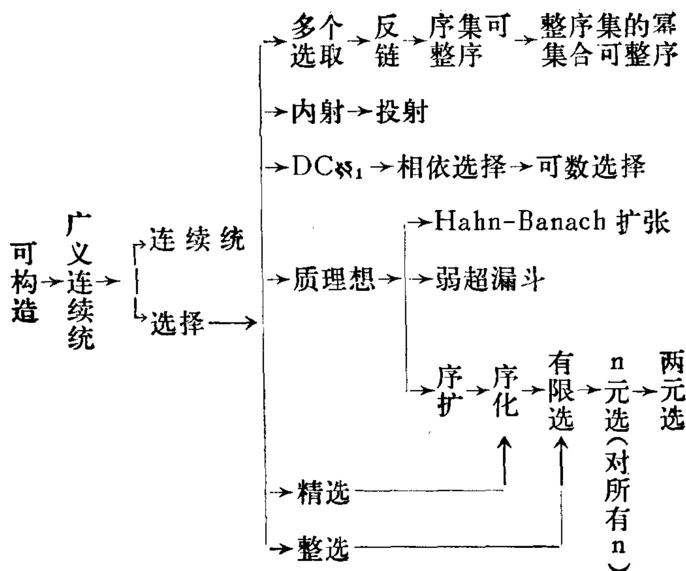
汇 总 结 果 Ⅱ

自 Gödel 的著名工作出来后，"数学基础"包括抽象集合论与数理逻辑在内，就更进一步大力发展起来了。为清楚起见，可分为"相容性"问题（除去等价性问题）与"独立性"问题来陈述。再为简单计，陈述下表时，一律去掉"假设"，"公理"，"原理"，"定理"等字。如"连续统"即连续统假设；再如：可整序集作成的类的选择公理即简记为"整选"；有限集作成的类的选择公理即简记为"有限选"；弱超漏斗定理即简记为"弱超漏斗"；精选原理即简为"精选"，等等。

又因在ZFA中，反链、多个选取、序集可整序、整序集的幂集合可整序等命题均真正弱于选择公理，故把它们列入表内，也不影响下表在ZF中的真实性；内射与投射亦然。关于这些，在汇总Ⅲ中还有具体命题作补充说明。

用一句话来总述相容性就有：

如果 ZF 相容，则 $ZF+AC+GCH+V=L$ 亦然，而 ZF 的相容性是在 ZF 中不能证明的。



汇总结果Ⅲ

自Cohen (1963—1966) 的关于独立性的重要工作出来后，打开了研究独立性问题的大缺口，涌现出大量的关于独立性的成果，迄今就编者所知，汇总如下：首先是 Cohen 的主要著名结果：

(一) GCH 独立于 $ZF+AC$；

(二) AC 独立于 ZF；

(三) 两元集的可数类的选择公理独立于 ZF。

其次是两者彼此独立的结果：

(a) 质理想定理与精选原理彼此独立；

(b) 序化定理与可整序集的类的选择公理彼此独立；

(c) UA 与 UW 彼此独立。

以及单方独立的结果：

(1) 质理想定理推不出选择公理；

(2) 精选原理推不出质理想定理，自然更推不出选择公理；

(3) n 元集合的类的选择公理即使对每个 n 均满足也推不出有限选，两元选自然更不行；

(4) 相依选择原理推不出 $DC_{\aleph_1}$ 而后者又推不出选择公理，可数选择又推不出相依选择；

(5) 弱超漏斗定理推不出质理想定理；

(6) Hahn-Banach 扩张定理推不出质理想定理；

(7) 序化定理推不出质理想定理；

(8) 序化定理推不出精选原理；

(9) 可整序集的类的选择公理推不出序化定理；

(10) 有限集的类的选择公理推不出序化定理；

(11) 序化定理推不出序的扩张定理，而后者又推不出质理想定理；

(12) 精选原理推不出序的扩张定理；

(13) 超穷基数的倍等定理推不出两元选；

(14) 倍等定理加上序化定理再加上$\aleph_0$-选取公理（即$Z(\omega)$）都推不出可数选择公理；

(15) 仅存在可数个可测基数推不出选择公理；

(16) 有限选推不出可数集作成的类的选择公理；

(17) 相依选择原理（即 DC）推不出倍等定理；

(18) UA 加上 UW 再加上质理想定理也推不出可数选择公理；

(19) 所有 Dedekind 有限的集合均为有限集合，也推不出可数选择公理；

(20) DC 加上序化定理也推不出选择公理；

(21) DC 加 $Z(\omega)$ 再加上有限选也推不出序化定理；

(22) DC 加 $Z(\omega)$ 再加上序化定理也推不出序的扩张定理；

(23) DC 加 $Z(\omega)$ 再加上序化定理也推不出精选原理。

Pincus (1977) 还有一些关于独立性的结果，由于陈述较长，故从略。

此外，在 ZFA 中还有（关于§8中的命题）：

(i) $18^\circ \not\rightarrow 17^\circ$；

(ii) $17^\circ \not\rightarrow 16^\circ$；

(iii) $16^\circ \not\rightarrow 15^\circ$；

(iv) $15^\circ \not\rightarrow 1^\circ$；

(v) $1^\circ \not\rightarrow 20^\circ$；

(vi) $20^\circ \not\rightarrow 21^\circ$。

参 考 文 献（略去前面已列出的）

（一）§8与§11汇总结果部分

［1］C. Kuratowski, 1922, Fund. Math. (3), p. 76.

［2］M. Zorn, 1935, Bull.Am.Math.Soc.(41),p.667.

［3］A. Fraenkel, 1922, Sitzungsber. Preussischen Akad. Wiss., Math. Kl., p. 253.

［4］——, 1928, ibid., p. 90.

［5］——, 1925, Math. Z. (22), p. 250.

［6］——, 1935, L' Enseignement Math.(34), p.32.

［7］——, 1937, J. Symb. Logic(2), p. 1.

［8］A. Mostowski, 1938, C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, (31), p. 13.

［9］——, 1939, Fund. Math. (32), p. 201.

［10］E.Specker, 1957, Z. Math. Logik u. Grundl. Math.(3), p. 173.

［11］A. Lindenbaum and A. Tarski, 1926, C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, (19), p. 299.

［12］W.Sierpiński,1947,Fund.Math.(34),p.1.

［13］E. Specker, 1954, Archiv Math.(Basel)5,p.332.

［14］K. Gödel, 1938, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. (24), p. 556.

［15］——,1939, ibid. (25), p. 220.

［16］——, 1940, Ann. Math. Studies 3 (Princeton

Univ.Press, Princeton, N.J.).

[17] A.Mostowski, 1949, Fund. Math. (36), p. 143.

[18] J. Shepherdson, 1951, J. Symb.Logic(16), p.161.

[19] A.Levy, 1957, C.R.Acad.Sci.Paris(245), p.1582.

[20] R. Montague, 1961, Essays on the Foundations of Mathematics, Y. Bar-Hillel, ed. (Jerusalem) 91—119.

[21] E. Marczewski, 1930, Fund. Math. (16), p.386.

[22] M.H.Stone, 1936, Trans. Am. Math. Soc. (40), p.37.

[23] O.Teichmüller, 1939, Deutsche Math.(4), p.567.

[24] J. W. Tukey, 1940, Ann. Math. Studies 2 (Princeton Univ.Press, Princeton, N.J).

[25] J. D.Halpern and A. Levy, 1964, Notices Am. Math. soc.(11), p.56.

[26] P. Bernays, 1942, J. Symb. Logic (7), p. 65.

[27] R.B.Jensen, 1967, Notices Am. Math. soc. (14), p.137.

[28] J. L. Kelley, 1950, Fund. Math. (37), p.75.

[29] R. Vaught, 1952, Bull. Am. Math. soc. (58), p. 66.

[30] D. Kurepa, 1953, Math. Ann. (126), p. 381.

[31] J. D.Halpern, 1962, Doctoral Dissertation, Univ. of California, Berkeley, Calif.

[32] D. Scott, 1954, Bull. Am. Math. soc.(60), p.83.

[33] S. Mrówka, 1955, Fund. Math.(43), p. 46; (46), p.165.

[34] H. Rubin and J. Rubin, 1963, Equivalents of the Axiom of Choice (North-Holland, Amsterdam).

[35] G. Rousseau, 1965, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math., (13), p. 521.

[36] L. E. Ward, Jr. 1962, Proc. Am. Math. Soc. (13), p.757.

[37] A. Levy, 1962, Fund. Math. (50), p. 475.

[38] T. Jech, 1966, Comment. Math. Univ. Carolinae (7), p.359.

[39] P. Vopěnka, 1967, ibid. (8), p. 145.

[40] S. Feferman, 1965, Fund. Math. (56), p.325.

[41] R. Rado, 1949, Canad. J. Math. (1), p.337.

[42] J. Loś an dc. Ryll-Nardzewski, 1951, Fund. Math. (38), p. 233.

[43] H. Rubin and Scott, 1954, Bull. Am. Math. Soc. (60), p. 389.

[44] D. Scott, 1954, Bull. Am. Math. soc. (60), p.83; p.390.

[45] L. Henkin, 1954, Bull. Am. Math. soc. (60), p.388.

[46] A. Tarski, 1954, Bull. Am. Math. soc. (60), p.390.

[47] ——, 1954, Indag. Math. (16), p.26.

[48] J. Loś and Ryll-Nardzewski, 1955, Fund. Math. (41), p.49.

[49] J. Mycielski, 1961, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (12), p. 125.

[50] W. A. J. Luxemburg, 1962, Bull. Am. Math. soc.

(68),p.416.

[51] A. Levy, 1962,Fund.Math.(50),p.475.

[52] ——, 1963, Acta Math.Acad. Sci. Hung. (14), p.125.

[53] ——, 1964, Fund. Math. (54), p. 135.

[54] J. Mycielski, 1964,Bull.Acad.Polon. Sci., Sér. Math., (8), p. 439.

[55] ——,Acta Math. Acad.Sci.Hung.(18),p.339.

[56] H. Lauchli,1971, Israel J. Math. (9), p. 422.

[57] P. J. Cohen, 1963, Independence results in set theory, The Theory of Models, J. Addison, L. Henkin and A.Tarski,eds.(North-Holland,Amsterdam,1965) pp. 39-54.

[58] Cohen, 1963,Proc.Natl.Acad.Sci.U.S.A. (50), p.1143.

[59] Cohen, 1964,ibid.,(51),p.105.

[60] Cohen, 1966, Set Theory and the Continuum Hypothesis (Benjamin,New York).

[61] S. Feferman, 1964, J. Symb. Logic (29), p.226.

[62] J. D. Halpern, 1964, Fund. Math. (55) ,p. 57.

[63] H. Läuchli, 1964, Fund, Math. (54), p. 31.

[64] J. D. Halpern and Laüchli, 1966, Trans. Am. Math.soc.(124),p.360.

[65] J.D.Halpern and Levy,1964,Notices Am.Math. soc. (11), p. 56.

[66] J.D.Halpern and Levy,1967,Proc. Symp. Pure

Math., Univ. of California, Los Angeles, D.Scott, ed., (13), p.83.

[67] W. A. J. Luxemburg, 1969, Intern.Symp.on the Applications of Model Theory, (Holt, Rinehart and Winston, Toronto, Ont.), p. 123.

[68] D. B. Morris, 1969, Notices Am.Math.soc.(16), p. 1088.

[69] U. Felgner, 1971, Z. Math. Logik u. Grundl. Math. (17), p.257.

[70] R. M.Solovay, 1970, Ann.Math.(92), p. 1.

[71] D.Pincus, 1968, Notices Am.Math.soc.(15), p.234.

[72] ——, 1969, Individuals in Zermelo-Fraenkel set theory, Doctoral Dissertation, Harvard Univ.

[73] ——, 1971, J. Symb. Logic(36), p.28.

[74] ——, 1972, J. Symb. Logic (37), p. 721.

[75] ——, 1972, Bull.Am.Math.Soc.(78), p.766.

[76] ——, 1973, Nonstandard Analysis, Lecture Notes in Math. (Springer, Berlin).

[77] J. D. Halpern, 1972, Pacific J.Math.(41), p.111.

[78] U. Felgner and Jech, 1973, Fund. Math. (79), no.1., p.79.

[79] G. Sageev, 1973, Notices Am. Math. soc. (20), p.22.

[80] A. R. D. Mathias, 1967, Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XIII, Part II, Univ. California, Los Angeles, Calif.) p.179.

[81] D. Pincus, 1974, Z. Math. Logik, Grundl.Math. (20), p. 503.

[82] J.K.Truss,1973-74, Ann.Math.Logic(6), p.147.

[83] J. L.Bell, Fremlin,1972, Fund.Math.(77)no.2. p.167.

[84] A. Hajnal, Kertész, 1972-73, Publ. Math. Debrecen (19), p. 339.

[85] R. Rado, 1971, J. Combinatorial Theory Ser. A(10),p.176.

[86] R. H.Cowen, 1973,Proc. Am.Math.soc.(41),p. 268.

[87] K. Kunen, 1973, Lecture Notes in Math., V. 337, Sprinyer, Berlin.

[88] J.K.Truss, 1973, Z. Math.Logik Grundl.Math. (19), p. 209.

[89] J. D. Halpern and Howard, 1974, Bull. Am. Math. soc. (80), p.584.

[90] G. Sageev, 1975, Ann. Math. Logic (8), p. 1.

[91] D. Pincus, 1974, Israel J. Math. (18), p. 321.

[92] G. P. Monor, 1974, Colloq. Math. (29), p. 1.

[93] C. Metelli, Salce, 1974, Am. Math. Monthly (81),p.101.

[94] U. Felgner, 1974, Comment. Math. Helv, (49), p.114.

[95] A. Mostowski, 1975, Lecture Notes in Math., vol. 450, Springer, Berlin.

[96] G. P. Monro, 1975, J. Austral. Math. soc.(19), p.35.

[97] Rockingham Gill, R. R. 1975, Z. Math. Logik Grundl. Math. (21)., Heft 4, p. 377.

[98] P. E. Howard, 1975, Proc. Am. Math. soc. (49), p. 426.

[99] A. Mostowski, 1958, Coll. Math.(6), p. 207.

[100] U. Felgner, 1971, Z. Math. Logik Grund. Math. (17), p. 257.

[101] A. R. D. Mathias, 1967, Proc. Symp. Pure Math. XIII Part 2.

[102] D. Pincus, 1974, AMS. Notices, Jenuary.

[103] ——, 1976, Fund. Math., (92), p.113.

[104] ——, 1977, ann. Math. Logic (11), p. 105.

（二）其它问题部分

[1] Feferman and Levy, 1963, Notices Am. Math. soc. (10), p.593.

[2] Bleicher, 1964, Fund. Math. (54), p. 95.

[3] Easton, 1964, Powers of regular cardinals, Thesis, Princeton University.

[4] Levy, 1964, Fund. Math. (54), p. 135.

[5] Bleicher, 1965, Fund. Math. (57), p. 247.

[6] Derrick and Drake, 1965, Proc. Leicester Colloq. Math. Logic, p. 75.

[7] Ellentuck, 1965, Ann. Math. (82), p. 225.

[8] Tarski, 1965, Notices Am. Math. soc. (12), p.719.

[9] Jech, 1966, Bull. Acad. Polon. sci., Sér.Math., (14), p. 293; p.533.

[10] Jech, 1966, Comment.Math.Univ.Carolinae(7), p.359.

[11] Ellentuck, 1966, Fund. Math.(58), p.241.

[12] Jensen, 1967, Notices Am. Math. soc. (14), p. 137.

[13] Ellentuck, 1968, Z. Math. Logik u. Grundl. Math. (14), p.143.

[14] ——, 1968, Fund. Math. (63), p. 7.

[15] ——, 1969, J. Symb. Logic (34), p. 70.

[16] Gauntt, 1968, Notices Am. Math. soc. (15), p. 351.

[17] Levy, 1969, Foundations of Math., J. Bulloff, ed. (Springer, Berlin), p.15.

[18] Morris, 1969, Notices Am. Math. soc. (16), p. 1088.

[19] Zuckerman, 1969, Ill.J.Math. (13), p.521

[20] ——, 1969, Z. Math. Logik u. Grundl. Math. (15), p. 385.

[21] ——, 1969, Fund. Math. (64), p. 163.

[22] Easton, 1970, Ann. Math. Logic (1), p. 139.

[23] Gauntt, 1970, Notices Am. Math. soc.(17), p. 454.

[24] Halpern and Howard, 1970, Bull. Am. Math. soc. (76), p. 487.

[25] Kleinberg, 1970, J. Symb. Logic (35), p. 410.

[26] Truss, 1970, Notices. Am. Math. soc. (17), p. 577; p. 694.

[27] Felgner, 1971, Fund. Math. (71), p. 43.

[28] Monro, 1972, Notices Am. Math. soc., (19), p.534.

[29] Kleinberg, 1973, J. Symb. Logic (38), p. 423.

[30] Zuckerman, 1973, Z. Math. Logik Grundl. Math. (19), p. 435.

[31] Kóscielski, 1973, Colloq. Math. (27), p. 165.

[32] Fleischer, 1973, Z. Math. Logik Grundl. Math. (19), p.205.

[33] Truss, 1973, Fund. Math. (78), no. 1., p.7.

[34] ——, 1973, Z. Math. Logik Grundl. Math. (19), p.211.

[35] Bernays, 1974, Amer, Math. soc.

[36] Friedman, 1974, J. Symb. Logic (39), p.79.

[37] Erdös and Hajnal, Fund. Math. (81), p.261.

[38] Cohen, 1974, J. Symb. Logic (39), p. 579.

[39] Jech, 1974, Israel J. Math. (18), p. 1.

[40] Rubin, 1973, Math. Mag. (46), p. 183.

[41] Monro, 1973, Fund. Math. (80), no. 2. p. 101.

[42] Zuckerman, 1973, Fund. Math. (77). no. 3., p. 289.

[43] Friedman, 1974, Proc.Am.Math.soc.(43), p.190.

[44] Fábryová, Magda, 1974, Sb. Praci Ped. Fak.v. Qstravě Ser. A **9** (37), p. 7 .

[45] Abian, 1974, Rev Roumaine Math. Pures Appl. (19), p. 1069.

[46] Cohen, 1974, Z.Math.Logik Grundl. Math. (20), p.229.

[47] Jech, 1974-75, Ann.Math.Logic(7), p.387.

[48] Jakubowicz, 1974, Colloq.Math.(29), p.161.

[49] Schmerl, 1974, Trans. Am. Math. soc. (188), p. 281.

[50] Schoch, 1974, Logique et Analyse (N.S.), (17), p. 95.

[51] Kanoveĭ, 1974, Dokl. Akad.Nauk SSSR(216), p.728.

[52] Devlin, 1974-75, Fund. Math. (82), p. 1.

[53] Kogalovskiĭ, 1974-75, Fund. Math. (82), p. 245.

[54] Fleissner, 1975, Proc. Am. Math. soc. (49), p. 517.

[55] Foldes, 1975, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. (A-B 280), p. 65.

[56] Galvin, Hajnal, 1975, Ann. of Math. (2)101, p. 491.

[57] Hickman, 1975, J. Austral. Math. Soc.(20), no. 1., p.78.

[58] ——, 1975, J. Austral. Math soc. (19), p. 7.

[59] Prikry, 1975, Bull. Am. Math. soc. (81), no. 5., p.907.

[60] Shoenfield, 1975, Am. Math. Monthly (82), p. 610.

[61] Truss, 1975, Bull. London Math. soc. (7), p.177.

[62] Harrington, Jech, 1976, J. Symb. Logic (41), no. 1. p.167.

[63] Hulchinson, 1976, J. Symb. Logic (41), no. 2., p.489.

[64] Pincus, Prikry, 1975, Proc. Am. Math. soc. (49), p.429.

[65] Case, 1976, Z. Math. Logik Grundl. Math. (22), no.1., p.1.

[66] Jecn, 1976, Proc. Am. Math. soc. (56), p.272.

[67] Cohen, 1976, ibid. (55), no. 1., p. 119.

[68] Andréka; Dahn; Németi, 1976, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. (24), no. 1. p. 1.

[69] Podèwski; Steffens, 1976, Bull. Londen Math. Soc. (8), no. 2., p.186.

[70] Hinnion, 1976, C. R. Acad. Sci. Paris Sér A—B (282), no. 1., p. 1.

[71] Dehornoy, 1976, ibid. no. 17., p. 935.

[72] Shelah, 1975, Israel Math., (20), p. 1.

[73] ——, 1975, Proc. Amer. Math. Soc., (48), p.207.

[74] ——, 1977, ibid. (62), p. 134.

[75] Hickman, 1976, ibid. (61), p.105.

[76] Baumgartner and Prikry, 1976, Discrete Math., (14), p.17.

[77] ——, 1977, Am. Math. Monthly (84), p. 108.

(三) Cantor, G. 的早期文献部分

J. f. die Reine und Angewandte Math., vol. 72, p.130(1870); vol. 73, p. 294(1871); vol. 77, P. 258(1874); vol.84, p.242(1878).

Math. Annalen, vol. 4, p. 497 (1871); vol. 5, p.123 (1872); vol.15, p.1(1879); vol.17, p.355(1880); vol.19, p. 588 (1882); vol.20, p.113 (1882); vol. 21, p. 51; p. 545 (1883); vol. 23, p.453(1884); vol. 46, p. 481 (1895); vol. 49, p.207(1897).

Jahresb. D. M. V., vol. 1, p. 75 (1892).

Rivista di Mat., vol. 5, p. 104 (1895).

Ztschr. f. Philos. und philos. Kritik, N. S. vol. 88, p. 224 (1886); vol. 91, p.81; p.252(1887); vol. 92, p. 240 (1888).

[General Information]
书名=超穷数与超穷论法
作者=谢邦杰
页数=140
SS号=10532944
DX号=
出版日期=1979年01月第1版
出版社=吉林人民出版社